定积分习题课

例4：求$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x\,dx$.

解：令$2x=t$，$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,dt$

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(2\sin x\cos x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln 2\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos(\frac{\pi}{2}-t)\,d(-t)$.

$=\frac{\pi}{4}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$

$=\frac{\pi}{4}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 + 2I$

则$I=-\frac{\pi}{4}\ln 2$

例7：设$f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}\,dy$，求$\int_0^1 (x-1)^2 f(x)\,dx$

解：原式$=\int_0^1 (x-1)^2\left[\int_0^x e^{-y^2+2y}\,dy\right]dx$

$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\int_0^x e^{-y^2+2y}\,dy\right]\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{3}(x-1)^3 e^{-x^2+2x}\,dx$

$=-\frac{1}{6}\int_0^1 (x-1)^2 e^{-(x-1)^2+1}\,d[(x-1)^2]$

令$(x-1)^2=u$

$=-\frac{e}{6}\int_1^0 ue^{-u}\,du = -\frac{1}{6}(e-2)$

例8：设$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，证明：

$$\int_0^{\pi} \frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

证：令$x=\pi-t$，$dx=-dt$.

左边$=\int_{\pi}^{0} \frac{(\pi-t)f(\sin t)}{1+\cos^2 t}(-dt) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)f(\sin x)}{1+\cos^2 x}\,dx$

$=\pi\int_0^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}\,dx - \int_0^{\pi} \frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}\,dx$.

即$2\int_0^{\pi} \frac{xf(\sin x)}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{f(\sin x)}{1+\cos^2 x}\,dx$ ✓

旋转体体积公式

(1) $V=\int_a^b A(x)\,dx$.

(2) f为$[a,b]$上连续函数，Ω是由平面图形 $0\le|y|\le|f(x)|$，$x\in[a,b]$.
Ω绕x轴旋转一周，则 $A(x)=\pi[f(x)]^2$.

$$V=\int_a^b A(x)\,dx=\pi\int_a^b [f(x)]^2\,dx$$

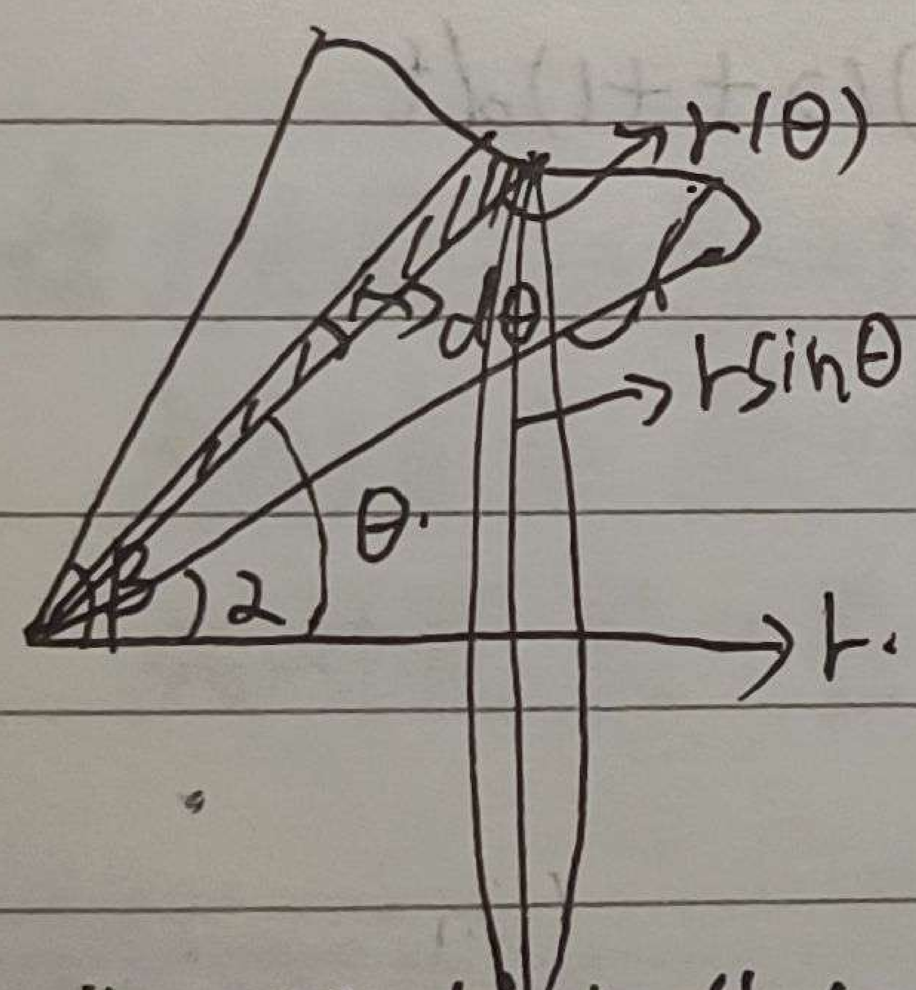
(3) 若为参数方程，$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ $V=\pi\int_a^b [y(t)]^2\,d[x(t)]$

$$=\pi\int_\alpha^\beta [y(t)]^2 x'(t)\,dt \quad, t\in[\alpha,\beta].$$

(4) 若为极坐标方程，$r=r(\theta)$，绕极轴旋转.

则 $\boxed{V=\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)\sin\theta\,d\theta}$，$\theta\in[\alpha,\beta]$.

证明：设平面图形由曲线 $r=r(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 围成，其中 $r=r(\theta)$ 在区间$[\alpha,\beta]$上连续且 $r(\theta)\ge 0$.



现在考虑对应于$[\alpha,\beta]$上任一微元$[\theta,\theta+d\theta]$的曲边扇形绕极轴旋转一周所得旋转体体积 ΔV.
而 ΔV 近似等于以 $r=r(\theta)$ 为半径的扇形绕极轴旋转一周的旋转体体积，

若设想将该体积展开，使内锥面平铺在平面上，可知该体积近似等于以 $r=r(\theta)$ 为半径，弧长为 $2\pi r(\theta)\sin\theta$ 的扇形为底，高为 $r(\theta)d\theta$ 的柱体积的 $\frac{2}{3}$（即从柱体中挖去3相应锥体的体积）

故 ΔV 的近似值，或体积元素应为

$$dV=\frac{2}{3}\,\frac{2\pi r(\theta)\sin\theta}{2\pi r(\theta)}\,\pi(r(\theta))^2\,r(\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{2}{3}\pi(r(\theta))^3\sin\theta\,d\theta$$

则旋转体体积为 $V=\int_\alpha^\beta \frac{2}{3}\pi r^3(\theta)\sin\theta\,d\theta$

平面图形面积公式

① 若为 $y=f(x)$ 形式，$S=\int_a^b f(x)\,dx$，$x\in[a,b]$.（与 x 轴所夹部分）

$\Delta S=\int_a^b[f_1(x)-f_2(x)]\,dx$

② 若为参数方程，$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$

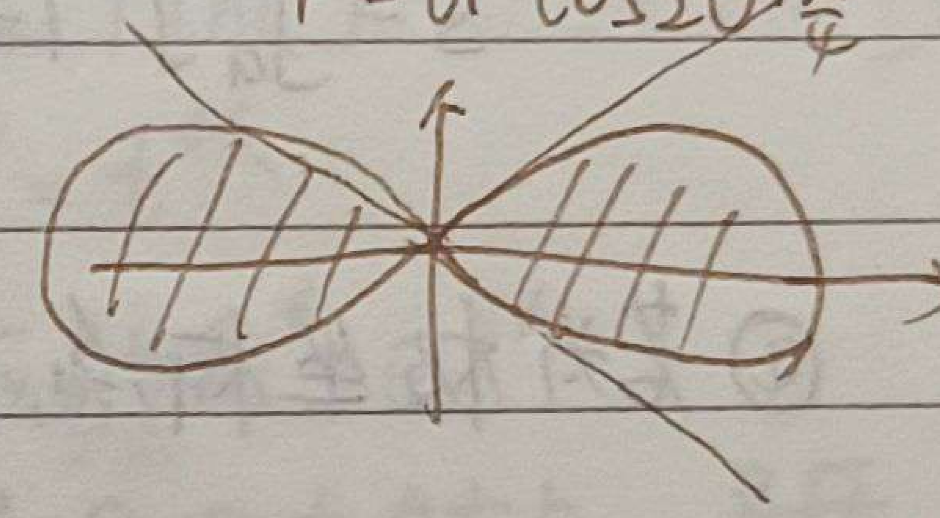
则 $S=\int_\alpha^\beta |y(t)\,x'(t)|\,dt$，$t\in[\alpha,\beta]$（与 x 轴所夹部分）

$S=\int_\alpha^\beta |x(t)\,y'(t)|\,dt$，$t\in[\alpha,\beta]$，（与 y 轴所夹部分）

③ 若参数方程为封闭曲线且自身不相交，即有 $x(\alpha)=x(\beta)$，$y(\alpha)=y(\beta)$

$$S=\left|\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt\right|=\left|\int_\alpha^\beta x(t)\,y'(t)\,dt\right|$$

$r^2=a^2\cos 2\theta$ 之 $\frac{\pi}{4}$



④ 若为极坐标方程，$r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$.

则扇形面积为 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\,d\theta$

$S=a^2$

☆ 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积为 $S=\pi ab$.

椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi abc$

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，绕 y 轴旋转的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi a^2 b$

绕 x 轴旋转曲面面积公式：

① 若为 $y=f(x)$，公式 $x\in[a,b]$，则 $S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$

② 若为参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$，$t\in[\alpha,\beta]$，$S=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$

③ 若为极坐标方程，$r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$

则 $\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$　$S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\theta)\sin\theta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,d\theta$

Date.　　/

平面曲线的弧长公式:

①若为参数方程,设C为一条,没有自交点的非闭平面曲线,则C的弧长为 $s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$, $t\in[\alpha,\beta]$

$C:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$, $t\in[\alpha,\beta]$, 且 $x(t), y(t)$ 均在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微

↓

则C是可求长的

②若 $x(t), y(t)$ 连续可微,且 $[x'(t)]^2+[y'(t)]^2\neq 0$, 则C为光滑曲线

③若为直角坐标, $y=f(x)$, 则记 $\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \end{cases}$ $x\in[a,b]$

(且 $f(x)$ 连续可微)

$$S=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

④若为极坐标系, $r=r(\theta)$, $\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases}$ $\quad x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta$, $y'(\theta)=r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta$

$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2}\,d\theta$ (当 $r'(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续,且 $[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2\neq 0$ 时)

证明:根据弧长定义,作曲线C的分割 $T\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$.

且 p_0 对应 $t_0=\alpha$, p_n 对应 $t_n=\beta$ 并且 $p_i(x_i, y_i)=(x(t_i), y(t_i))$

$(i=0,1,2,\dots n)$

于是,可以得到与分割T相对应的在区间 $[\alpha,\beta]$ 上的分割 T'

$$T': \alpha=t_0<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<t_n=\beta$$

而由定义, $s=\lim_{\|T\|\to 0}s_T=\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}|p_{i-1}p_i|$ (①), 是对分割T

而要证明的等式的右边是对分割 T' 的,

且右边 $=\lim_{\|T'\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i$ (②), $\xi_i\in[t_{i-1}, t_i]$

要证明①与②的等价关系,

MAOKE猫客

首先，先试图证明 $\lim_{\|T\|\to 0}$ 与 $\lim_{\|T'\|\to 0}$ 的关系.

我们证明：$\lim_{\|T\|\to 0}\|T'\| = 0$，即分割 T 与分割 T' 同时趋向于0

(我们采用反证法).

→ 可以对δ赋值

假设 $\lim_{\|T\|\to 0}\|T'\| \neq 0$，即 $\exists \varepsilon_0$，使对 $\boxed{\forall \delta > 0}$ $\exists T$，使 $\|T\| < \delta$，但 $\|T'\| \geq \varepsilon_0$

我们可以在C上找到两点 Q', Q''，使 $|Q'Q''| < \delta$，但 Q' 与 Q'' 对应的 t', t''，满足 $|t' - t''| \geq \varepsilon_0$.

取 $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. 则可以取出两个点列 $\{Q_n'\}\{Q_n''\}$.

满足 $|Q_n'Q_n''| < \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

但 $|t_n' - t_n''| \geq \varepsilon_0$

由致密性定理可知，存在收敛子列 $\{t_{n_k}'\}\{t_{n_k}''\}$.

$t^*, t^{**} \in [\alpha, \beta]$，$\lim_{k\to\infty} t_{n_k}' = t^*$，$\lim_{k\to\infty} t_{n_k}'' = t^{**}$

且 $|t^* - t^{**}| \geq \varepsilon_0$，$t^* \neq t^{**}$，但其所对应的 Q^*, Q^{**}

满足 $|Q^*Q^{**}| = 0$ 即 Q^*, Q^{**} 重合，但已知C没有自交点，矛盾.

于是 $\lim_{\|T\|\to 0}\|T'\| = 0$.

接下来，我们证明 $\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i| = \lim_{\|T'\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i$

即只需证到 $\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i| = \lim_{\|T\|}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2}\,\Delta t_i$

$$\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$$

而 $\Delta x_i = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i)\Delta t_i$，$\xi_i \in \Delta t_i$

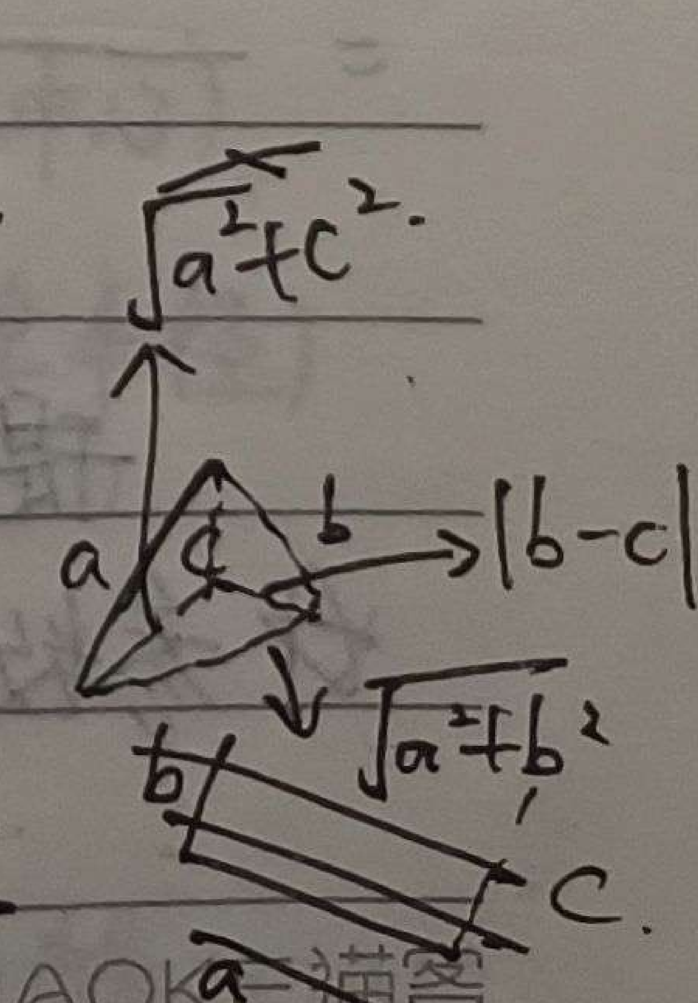
$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i)\Delta t_i$，$\eta_i \in \Delta t_i$

左边 $= \sum_{i=1}^{n}\sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2}\,\Delta t_i$

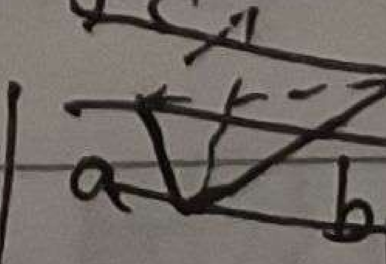
我们考虑 $\sigma_i = \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2} - \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\xi_i)]^2}$

我们只需证到 $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\Delta t_i < \varepsilon$ 即可.

即只需 $\sigma_i < \frac{\varepsilon}{\beta - \alpha}$ 即可.



而考虑三角不等式，$\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2} \leq |b-c|$



Date. /

提可知 $\omega_i \le |y'(\xi_i) - y'(\eta_i)|$

只需证 $|y'(\xi_i) - y'(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$ 即可.

而由于 $y'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则一致连续

即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $\|T'\| < \delta$ 时, ~~有~~ 只要 $\xi_i, \eta_i \in \Delta_i$ 时

有 $|y'(\xi_i) - y'(\eta_i)| < \frac{\varepsilon}{\beta-\alpha}$ 成立 ✓

$\boxed{\text{光滑曲线的曲率公式:}}$

☆ 微分三角形: 弧长 $s = \int_\alpha^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}\, d\tau$ (从 $P_0(x(\alpha), y(\alpha))$ 到动点 $P(x(t), y(t))$ 的弧长).

则 $\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$.

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \Rightarrow$ (ds 称为"弧微分").

☆ 平均曲率: $\bar{K} = \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ $\quad \Delta\alpha = \alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)$,

在P处曲率 $K = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} = \frac{\left[\arctan\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'}{s'(t)} = \frac{\left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]'}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]^2\right)}$$

引入参数方程新变量 t, $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)}$ ✓

$$= \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{\left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

~~提, 曲率计~~

☆ 参数方程的曲率公式为 $\boxed{K = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}}$

☆ 直角坐标方程 $y=f(x)$ 的曲率公式为 $x=x,\ y=f(x)$.

$$k=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

☆ 极角坐标方程 $r=r(\theta)$ 的曲率公式为

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta \\ y=r(\theta)\sin\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x'(\theta)=r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta \\ y'(\theta)=r'(\theta)\overset{\sin\theta}{\cancel{\cos\theta}}+r(\theta)\cos\theta \end{array}$$

$$[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2=[r'(\theta)]^2+[r(\theta)]^2$$

$$x''(\theta)=r''(\theta)\cos\theta-r'(\theta)\sin\theta-r'(\theta)\sin\theta-r(\theta)\cos\theta$$

$$=r''(\theta)\cos\theta-2r'(\theta)\sin\theta-r(\theta)\cos\theta$$

$$y''(\theta)=r''(\theta)\sin\theta+r'(\theta)\cos\theta+r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta$$

$$=r''(\theta)\sin\theta+2r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta$$

$$k=\frac{|x'(\theta)y''(\theta)-x''(\theta)y'(\theta)|}{[r'^2(\theta)+r^2(\theta)]^{\frac{3}{2}}}$$

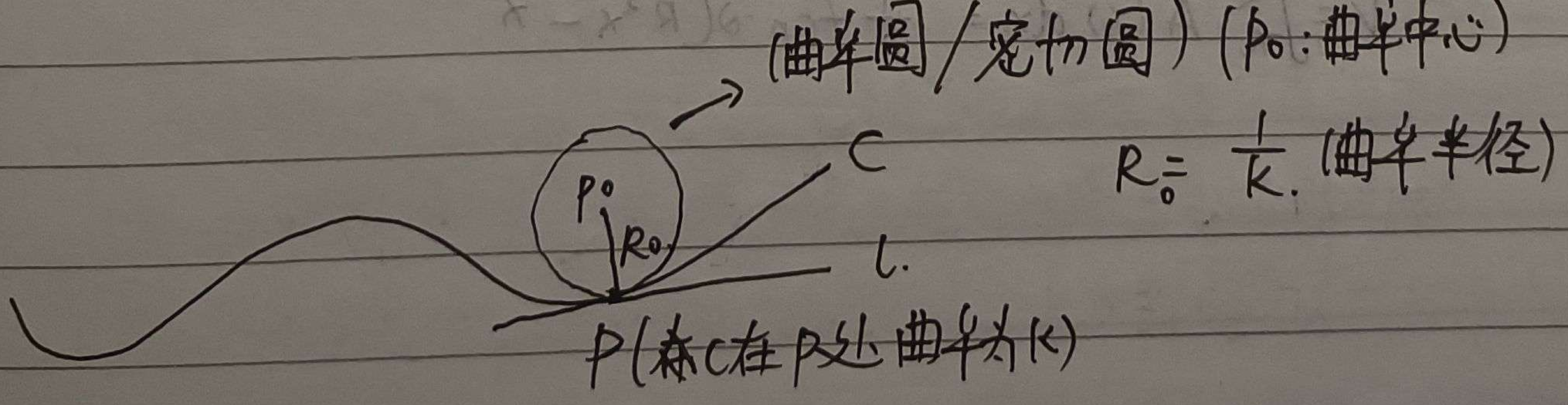
☆ 挠率: $\tau=\tau(t)$: 曲线逃离平面的能力

(当 $a>b>0$ 时)

☆ 椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在长轴处曲率最大 $k_{max}=\frac{a}{b^2}$, 在短轴处曲率最小, $k_{min}=\frac{b}{a^2}$.

圆在处处曲率相同, 且 $k=\frac{1}{R}$.

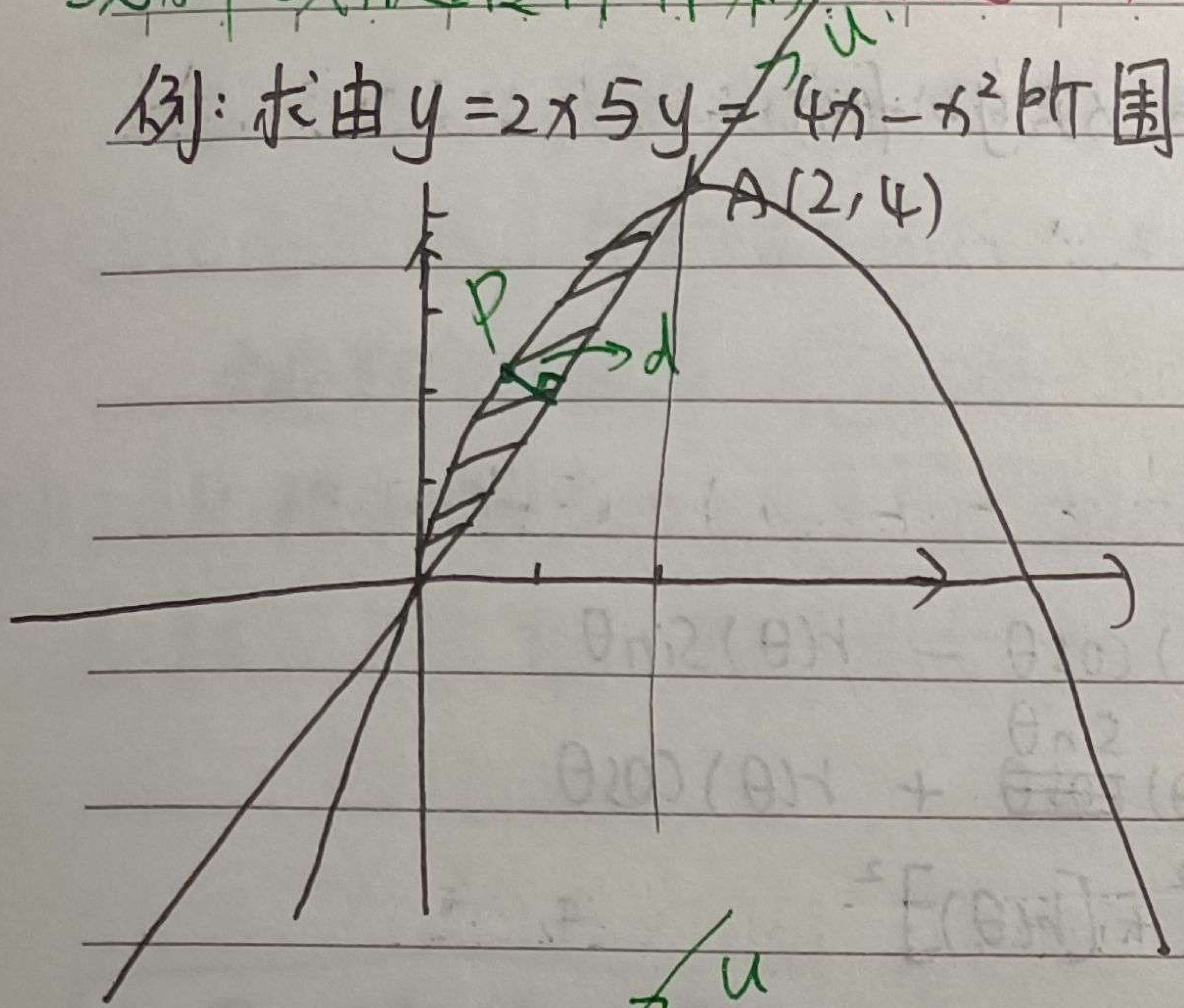
直线曲率处处为 0



此时曲率圆在P点与曲线C处有相同的切线, 曲率及凸性

绕斜线旋转体体积（微元法的典型思想）

例：求由 $y=2x$ 与 $y=4x-x^2$ 所围区域绕 $y=2x$ 旋转所得体积，



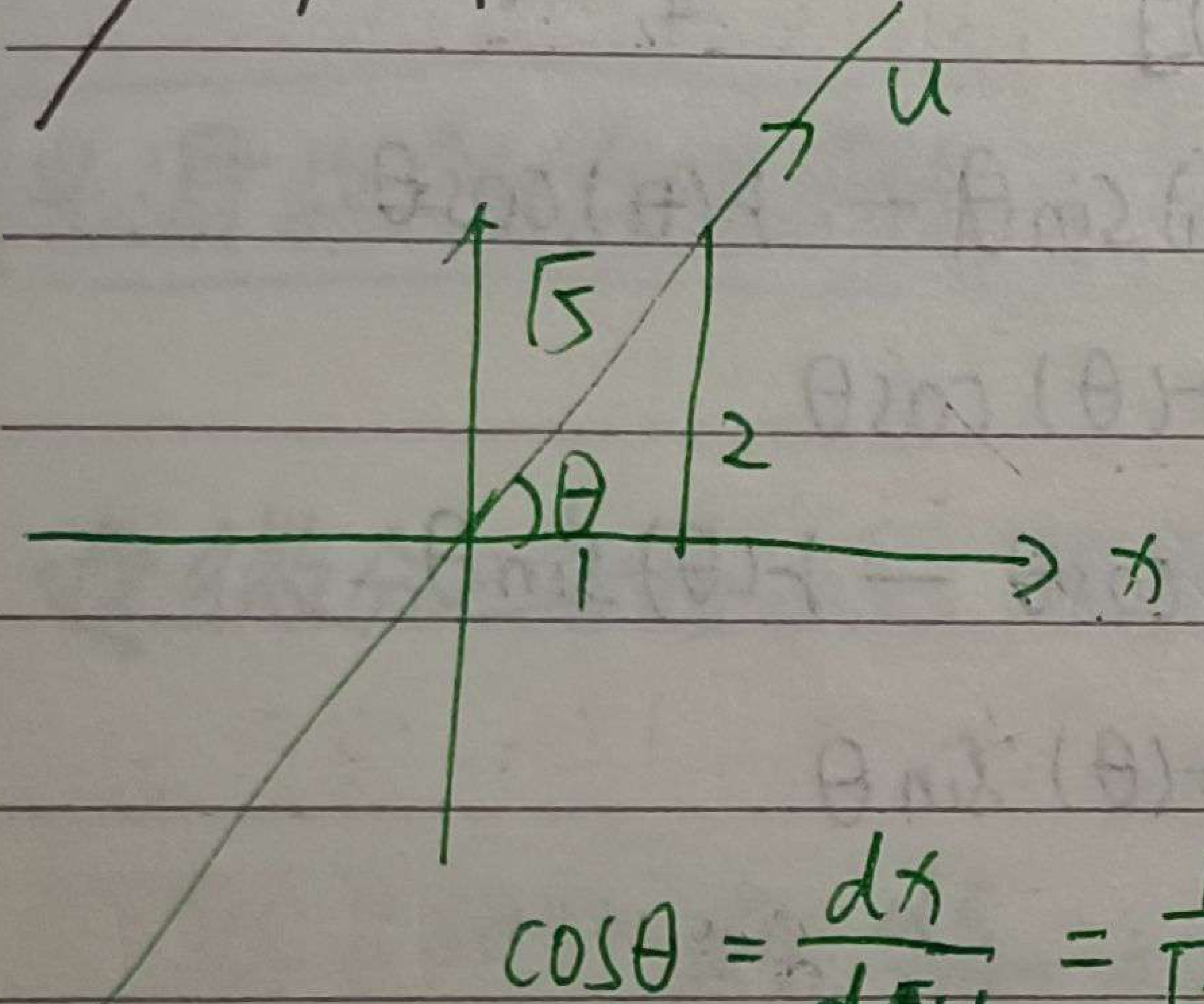
曲线上任一点 $P(x,\ 4x-x^2)$

到直线 $y=2x$ 距离为

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{5}}\left|x^2-2x\right|$$

以 $y=2x$ 为数轴 u.（在 u 轴上取 $(u,\ u+du)$）

$\boxed{\text{则 } dV=\pi\rho^2 du.}$ ☆



$(du=\sqrt{5}\,dx)$.

则 $dV=\pi\rho^2 du$

$$=\pi\cdot\frac{1}{5}(x^2-2x)^2\cdot\sqrt{5}\,dx.$$

$\cos\theta=\dfrac{dx}{du}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

则 $du=\sqrt{5}\,dx$.

故 $V=\int_0^2\pi\cdot\frac{1}{5}(x^2-2x)^2\cdot\sqrt{5}\,dx.$

$$=\frac{16}{75}\sqrt{5}\pi.$$

抽象函数微元思想

例：

解：取 x 为积分变量，变化区间为 $[-R,R]$，在 $[-R,R]$ 上任取一点 x，过 x 作垂直于 x 轴的平面截立体，截面的面积

$$A(x)=\frac{1}{2}y\cdot y\tan\alpha=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha$$

$$V=\int_{-R}^{R}A(x)\,dx=\frac{1}{2}\tan\alpha[R^2x-x$$

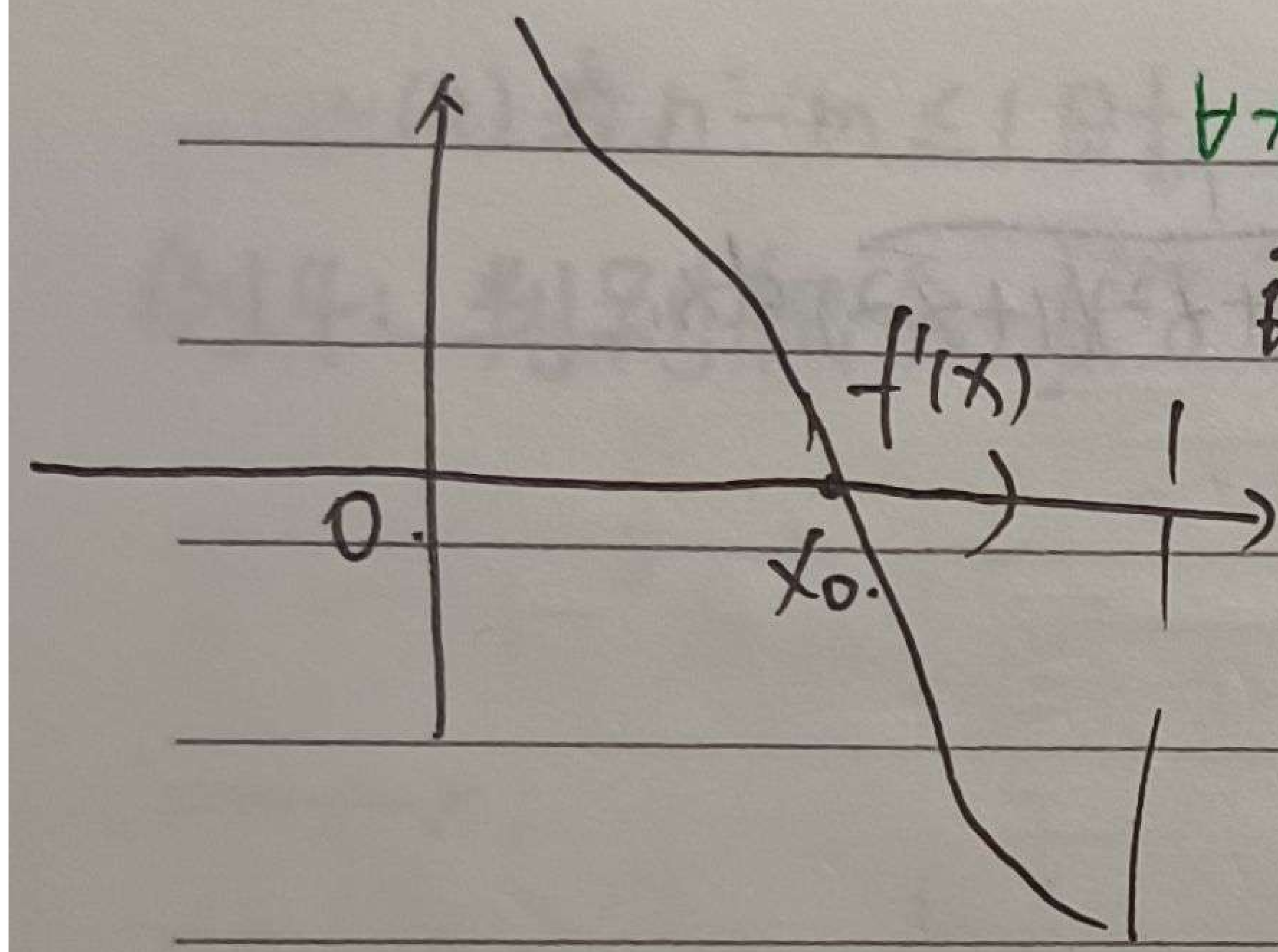
例：设 $f(x)\in C([0,1])$，且值域 $R(f)\subset[0,1]$，若 $f(0)=f(1)=0$，$f'(x)$在$[0,1]$上递减，则曲线 $y=f(x)$ 在$[0,1]$上的弧长不大于3.

证明：因f在$[0,1]$上连续可微且 $f(0)=f(1)=0$.

所以由Rolle中值定理，可知存在 $x_0\in(0,1)$，使 $f'(x_0)=0$

且 $f(x_0)\geq 0$. 又因 $f'(x)$在$[0,1]$上递减，所以 $\forall x\in[0,x_0]$，有 $f'(x)\geq f'(x_0)=0$，

$\forall x\in[x_0,1]$，有 $f'(x)\leq f'(x_0)=0$.



即 $f(x)$在$(0,x_0)$上递增，在$(x_0,1)$上递减.

则 $S_{[0,x_0]}:=$曲线在$[0,x_0]$上的弧长 $=\int_0^{x_0}\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+[f'(\xi_k)]^2}$$

其中 $\xi_k\in\left(\frac{kx_0}{n},\frac{(k+1)x_0}{n}\right)$

不妨假定 ξ_k是由f在$\left[\frac{kx_0}{n},\frac{(k+1)x_0}{n}\right]$上运用拉格朗日中值定理而得，即 $f'(\xi_k)=\left[f\left(\frac{(k+1)x_0}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}x_0\right)\right]\Big/\frac{x_0}{n}$，因此

$$S_{\cancel{x_0}\,[0,x_0]}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\left(\frac{x_0}{n}\right)^2\left[f\left(\frac{(k+1)x_0}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}x_0\right)\right]^2}\cdot\frac{1}{\frac{x_0}{n}}$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{\frac{x_0}{n}+\left[f\left(\frac{(k+1)x_0}{n}\right)-f\left(\frac{kx_0}{n}\right)\right]\right\}=\underline{x_0+f(x_0)}$$

类似可得，$S_{[x_0,1]}\leq 1-x_0+f(x_0)$

综合上述结果可知，$S_{[0,1]}\leq x_0+f(x_0)+1-x_0+f(x_0)=1+2f(x_0)\leq 3$

□