2.15晚 高数A习题复习

笔记：

1、不定积分

(Ostrogodladsky) 实系数真分式 $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 既约，其中 $Q(x)=(x-\alpha_1)^{\lambda_1}\cdots(x-\alpha_s)^{\lambda_s}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}$

那么 $\int R(x)dx=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\sum_{k=1}^{s}A_k\ln|x-\alpha_k|+\sum_{k=1}^{t}[B_k\ln(x^2+p_kx+q_k)+C_k\arctan\frac{2x+p_k}{\sqrt{4q_k-p_k^2}}]+C$

其中 A_k,B_k,C_k 和 C 均为实常数，且 $Q_1(x)=(x-\alpha_1)^{\lambda_1-1}\cdots(x-\alpha_s)^{\lambda_s-1}(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1-1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t-1}$

(Chebyshev) 对于二项式积分 $\int x^{\alpha}(a+bx^{\beta})^{\nu}dx$，其中 $\alpha,\beta,\nu\in\mathbb{Q}$

(1) 若 $\nu\in\mathbb{Z}$，令 $x=t^N$ (N 为 α,β 公分母)

(2) 若 $\frac{\alpha+1}{\beta}\in\mathbb{Z}$，令 $a+bx^{\beta}=t^M$ (M 为 ν 分母)

(3) 若 $\frac{\alpha+1}{\beta}+\nu\in\mathbb{Z}$，令 $\frac{a+bx^{\beta}}{x^{\beta}}=t^M$ (M 为 ν 分母)

例子：① $\int\frac{x^4+x^3+3x^2-1}{(x^2+1)^2(x-1)}dx=\frac{ax+b}{x^2+1}+A\ln|x-1|+B\ln(x^2+1)+C\arctan x+D$

② $\int\frac{x^2+1}{x\sqrt{1+x^4}}dx \xrightarrow[1+x^4=s^2]{\frac{1+x^4}{x^4}=t^2} -\frac{1}{2}\int\frac{1}{t^2-1}dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{s^2-1}ds$

2.定积分：

设 $f,\frac{\partial f}{\partial x}\in C([a,b]\times[p,q])$，$c(x),d(x)\in C^1[a,b]$，$p\le c(x)\le q$，$p\le d(x)\le q$，则 $F(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}f(x,y)dy\in C^1[a,b]$

并且 $F'(x)=\int_{c(x)}^{d(x)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy+f(x,d(x))d'(x)-f(x,c(x))c'(x)$

例子：$f(x)=\int_{x^2}^{1}e^{-t^2}dt$，则 $\int_0^1 xf(x)dx=?$ $\left(\frac{1}{4}(1-e^{-1})\right)$

中华人民共和国·430072·湖北省·武汉市·武昌·珞珈山
Luojiashan, Wuchang, Wuhan, Hubei 430072 P.R.China
E-mail: maths@whu.edu.cn

3、中值定理：

辅助函数：$\exists \xi\in(a,b)$ s.t. $f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$ 可令 $F(x)=f(x)e^{\int_0^x g(t)dt}$

例子：$f\in C^1[a,b]$ 且 $2\int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{\lambda(x+b)(x-b)}f(x)dx=(b-a)f(b)$，证明：$\exists \xi\in(a,b)$, s.t. $f'(\xi)+2\lambda\xi f(\xi)=0$

一些考研真题：

(2023·数一) 当 $x\to0$ 时，$ax+bx^2+\ln(1+x)\sim e^{x^2}-\cos x$，求 $ab=$? ans: -2

(2023·中科院) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\sqrt[n]{64}}{3}\right)^{2n+1}=$? ans: 16

(2023·数一) 设微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解在 $\mathbb{R}$ 上有界，则 $\underline{a=0,\ b>0}$

(2023·数一) $f\in C^2[-a,a]$. (1) $f(0)=0$，则 $\exists\xi\in(-a,a)$ s.t. $f''(\xi)=\frac{1}{a^2}[f(a)+f(-a)]$

(2) f 在 $(-a,a)$ 取极值，则 $\exists\eta\in(-a,a)$ s.t. $|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|$

(2023·南京大学) $f\in C^2[0,1]$，$f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$，则 $\exists\xi\in(0,1)$ s.t. $f''(\xi)\geq8$.

(2023·北师) $f\in C^2[a,b]$，$f(a)=f(b)=0$，则 $\max\limits_{[a,b]}|f|\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{[a,b]}|f''|$

(2022·武大) $f\in C^3[a,b]$，$f(a)=f'(a)=f(b)=0$，且 $|f'''|\leq M$. 证明：$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\frac{M}{72}(b-a)^4$