Fourier变换中的分析

之 夜霜月の讨论班讲义

武汉大学　数学与统计学院

2022.9.-2023.1.

写在前面

这是武汉大学2022-2023学年秋季学期Fourier分析讨论班的讲义，由笔者主笔主讲，也有来自听众的补充.

为何选择Fourier分析呢？一是原本学期专业选修课“Fourier分析”因故未能开设，留下缺憾. 二是E. Stein的*Introduction to Fourier Analysis*这本经典教材——也是笔者的现代分析启蒙读物——令笔者深感Fourier分析于知识完整，于教学价值还是于后续学习皆在紧要处，值得深入研讨. 在筹划课程时，笔者依然秉承来自Stein的经典思路：应当循着Fourier分析的线索把尽可能丰富的材料收集起来，以资学习者领略现代分析的万物霜天.

然而，古典Fourier分析的内容已纳入任何标准的数学分析课程，Stein等一众Fourier分析专业教材珠玉在前，遑论其他分析课程的不少优秀教材都有对应的章节. 笔者只是一个搬运者的角色，对内容的原创性没有贡献. 不过在材料组织上，笔者欲改变先讲理论后谈应用的传统架构，换言之，期望围绕探索理论的旅途中不断涌现的问题而不是Fourier分析的理论本体来展开讨论. 因此课程计划如此进行——先介绍基本概念，快速通过古典的内容，而在后2/3程中把更多精力放在以下目标：渐进地讨论各种专题，需要什么工具就介绍什么工具，醉翁之意在于流畅地引出并应用现代实分析的若干核心内容，并尝试探入调和分析，PDE等分析领域，为各位撑一杆长篙，向青草更青处漫溯. 课程名定为“Fourier变换中的分析”而非“Fourier分析”，也是这般用心.

从实践角度，课程设计在Banach/Hilbert空间的语境中研究$L^p(\mathbb{R}^n)$空间的Fourier分析；定义Fourier变换和求解PDE时产生的困难带来了分布理论这门新语言；实插值定理和C-Z分解在运用极大算子研究Fourier级数求和的收敛性时得以出场；最后在微分算子和奇异积分的合力推动下，上述工具齐聚最后一章，顺势导出Sobolev空间的相关理论. 当然数学分析和实变函数中担任主角的诸多技术也在论证细节处得到广泛应用. 扉页所引D. Hilbert的论述，庶几能够传达笔者的初衷.

但无论如何构想，行难于言，课程难免囿于井底之见失于纰漏琐碎. 笔者无意亦无能完整介绍所提及的理论，仅仅为了开辟游览现代分析的新路线而做了一次探险. 因此在这里必须真挚地感谢耐心参与讨论班的朋友们，热情的他们经历了一场天马行空的实验，也忍受着笔者水平浅陋所致的不便；特别要感谢骐神为讨论班的顺利开设所做的无私付出，毛神在分析学学习和教学上的大力协助，以及铠神应邀作概率论报告的慷慨(见附录).

由于随学随讲随写的形式和笔者的粗心与懒惰之过，错误、笔误甚多，许多简单或常见的细节论证从略，关键处也只有证要，总之这份讲义仅能留下一个相对清晰的骨架而无血肉充盈，还望各位包涵(当然换个角度想，也不妨留作习题吧). 当然这份讲义决不会是终稿，欢迎各位指正，以便改进.

夜霜月，记于2023年1月10日

几点提醒

1. 应当声明的是，本讲义参考(⇔抄袭)了许多优秀的学习材料. 包括

Introduction to Fourier Analysis, E. Stein
无需多言.

数学分析之课程讲义(3卷), 于品
十分精良的分析教材. 第3章和第5章基本按照品神的思路展开. 第3卷是入门分布理论和PDE的绝佳材料.

Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, G. Folland
部分实/泛函分析的结论和Fourier分析中一些精细的估计来自这本经典教材.

An Epsilon of Room Ⅰ:Real Analysis , T. Tao
内容丰富的分析通论，融入了大量Tao个人的深刻理解. Tao清新生动的文风值得信赖，非常适合用来展望现代分析脉络. 实插值定理的证明完全采用该书的叙述，最后两章也受了不少影响.

Functional Analysis, P. Lax
Lax巨神理论与应用并重的佳作. 分布理论借鉴了不少该书附录的讲法.

Partial Differential Equations, J. Jost
GTM214，材料安排非常清爽的PDE教材(个人认为比Evans那本砖头更适合上手). 后半部分侧重椭圆PDE理论，讲义参考了其中不少内容(但笔者PDE还是学太少了呜呜).

Fourier Analysis, J. Duoandikoetxea
清晰，明快，精彩的调和分析教材(却挂着Fourier分析的名字诈骗)，每一章的参考文献补充也非常良心，很适合入门(比GTM249,250好太多了qwq). 讲义的调和分析内容基本采用该书的讲法.

Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, E. Stein
同样优秀的调和分析教材，讲义中Sobolev空间部分基本采用该书的体系(D放在参考文献让读者自己查……). 这本书也是快速上手Littlewood-Paley理论的上佳选择. 如果在调和分析搞个人崇拜，估计就是“Read everything about Stein”罢.

2. 考虑到听众知识背景参差，笔者在第1-2章(即古典Fourier分析部分)仍按Riemann积分的语言叙述，并另撰一份实变函数论的基础材料供有需求者入门. 而自第3章起课程就可以相对自在地使用Lebesgue测度和Lebesgue积分了，对于前面的内容有背景的朋友主动加强为实变版本即可.

3. 关于讲义内容的探讨，改进和勘误，请通过邮箱ysydyx12345@163.com联系.

数学的艺术在于找到一个特例，其中隐含了所有推广的胚芽.

——D. Hilbert

目录

0 引入 **1**

一维波动方程

热方程，圆盘上的Dirichlet问题

1 基础概念和技术 **4**

函数的光滑性与频率的衰减

微分与乘子

卷积与恒等逼近

补充：稠密性技巧

2 Fourier级数的收敛性(Ⅰ)：求和，局部化 **15**

Dirichlet核，Fejér核

局部化定理，收敛性判别法

3 从$\mathbb{T}$到$\mathbb{R}^n$：L^1和L^2空间上的Fourier变换 **21**

L^p空间基础，$\mathbb{R}^n$上的恒等逼近

$L^1(\mathbb{R}^n)$上的Fourier变换，Fourier反演公式

$L^2(\mathbb{T})$和$L^2(\mathbb{R}^n)$上的Fourier变换

补充：投影算子，Riesz表示定理

Poisson求和公式，周期化

4 Fourier级数的收敛性(Ⅱ)：$a.e.$收敛与极大算子 **35**

卷积/乘子，周期化与可敛性：从$\mathbb{T}$到$\mathbb{R}$

分布函数，弱型估计，$a.e.$收敛与算子族极大算子

弱/强(p,q)型；$L^p, L^{p,\infty}$的插值，实/复插值定理

球卷积核，Hardy-Littlewood极大算子与可敛性

Calderón-Zygmund分解，极大算子的弱(1,1)估计

5 从L^1_{loc}到$\mathcal{D}'$：分布理论，缓增分布的Fourier变换 **48**

试验函数$\mathcal{D}(\Omega)$，分布$\mathcal{D}'(\Omega)$的性质和运算

分布的局部刻画与支集，分布的卷积

Laplace算子的基本解，初探椭圆PDE

Schwartz空间$\mathcal{S}$，缓增分布$\mathcal{S}'$的Fourier变换

紧支/点支/调和的结构刻画；平移不变算子

热/波方程的基本解，初值问题及物理意义

6 微分算子，奇异积分与Sobolev空间 **88**

线性微分算子，Fourier乘子与奇异积分

奇核与Hilbert变换，C-Z算子，椭圆PDE

补充：Dirichlet核$\mathcal{D}_R$，Fourier级数的L^p收敛性

Sobolev空间$W^{k,p}$，H^s与Fourier变换

Riesz位势，Sobolev嵌入定理，椭圆正则性

A 概率论报告 by cyc **110**

写在前面

预备知识——概率论基础概念

中心极限定理的陈述与证明思路

关键性引理与证明步骤

补充习题

附录

0 引入

一维波动方程

考虑$\mathbb{R}^2$上一根两端固定于$(0,0),(\pi,0)$轴上的弹性均质细绳在y轴方向上振动，那么可以将细绳的曲线看做一个时空中的二元函数$u(x,t)$. 力学上的推导告诉我们u满足以下的PDE:

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2})u=0 \tag{1}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\forall t\geq 0 \tag{2}$$

$$u(x,0)=f(x) \tag{3}$$

(1)称为**波动方程**，(2)(3)分别称为边值和初值条件，(1)(2)(3)的解也称为驻波. 下面应用"预解"的思想来获得方程的(部分)解: 假设**变量分离**成立: $u(x,t)=\phi(x)\varphi(t)$，代入方程即有

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)}=\frac{\varphi''(t)}{\varphi(t)}$$

两端分别只与x,t相关，比值只能是常数，不妨设为λ，则有两个ODE

$$\phi''(x)-\lambda\phi(x)=0$$

$$\varphi''(x)-\lambda\varphi(x)=0$$

只有$\lambda=-\omega^2<0$时解u是振荡的(感兴趣的读者可以参考ODE中的Strum比较定理，是不错的数学分析学习材料)，求解即有

$$\phi(x)=A_1\cos\omega x+B_1\sin\omega x,\varphi(t)=A_2\cos\omega t+B_2\sin\omega t,$$

$f(0)=f(1)=0$代入就得到

$$u_\omega(x,t)=(A_\omega\cos\omega t+B_\omega\sin\omega t)\sin\omega x,\omega\in\mathbb{Z}_{\geq 1} \tag{4}$$

下面是一个简单但重要的观察：(1)是**线性**的，即如果方程各个解的线性组合仍然是解(比如乐谱中基音与各重和弦的叠加). 又注意到(4)不一定满足(3), D. Bernoulli猜测方程存在以下收敛的三角级数解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nt+B_n\sin nt)\sin nx$$

特别的有

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin nx$$

利用Euler公式的推论$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}$可以写作更对称的形式

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_ke^{ikx} \tag{5}$$

但直到Fourier才真正开始研究以下问题

问题1. 一个周期函数$f(x)$能否表示为三角级数(5)？若不能，需要什么限制？
问题2. 三角级数(5)的部分和是否收敛？逐点？一致？还是其他？
问题3. 系数a_k的求解.

热方程，圆盘上的Dirichlet问题

Fourier的工作源于热方程: 在一个区域$\Omega\subset\mathbb{R}^2$上定义热方程

$$(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta)u=(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2})u=0 \tag{6}$$

$$u(x,y,0)=f(x,y)$$

Fourier利用变量分离也给出了类似的三角级数解，不过下面我们以一种更有趣的方式来研究这个问题.

热量经传导后会达到平衡态，那么$\frac{\partial u}{\partial t}\equiv 0$，

$$\Delta u=0 \tag{7}$$

满足(7)的u称为Ω上的**调和函数**，某种程度上这刻画了空间中一个稳定的势能分布. 一个在数学和物理上举足轻重的问题是在单位开圆盘D及其边缘C上求解(7):

$$\Delta u\mid_D=0, D=\{(r,\theta),0\le\theta\le 2\pi,0\le r<1\}$$

$$u\mid_C=f(\theta), C=\{(1,\theta),0\le\theta\le 2\pi\}$$

这类边值问题称为圆盘上的**Dirichlet问题**，尝试“求解”该问题：

假设展开(5)成立，我们就可以将问题化简为$u\mid_C=e^{ik\theta}$. 如果将$\mathbb{R}^2$看做复平面$\mathbb{C}:z=re^{i\theta}$，那么有以下重要的观察

$$z^k\mid_C=e^{ik\theta}$$

$$\Delta z^k=0,k\ge 0 \tag{8}$$

((8)可直接计算验证，但如果从复变函数的角度看是很自然的)(8)在$k<0$时出现了奇点$z=0$，不过可以取共轭

$$\Delta\overline{z^{|k|}}=0,k<0$$

所以我们可以大胆猜测

$$u(re^{i\theta})=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kr^{|k|}e^{ik\theta}$$

很快发现

问题4. 求u的显式解. 解的唯一性？
问题5. $u\mid_C=f$是否成立？$r\to 1$时如何逼近f(稳定性)？

正是这些问题等等推动了Fourier分析这门优雅的数学分支诞生、发展并反哺整个分析

学. 在课程中我们会系统地研究Fourier级数/变换，前面的几个问题将陆续得到各种程度的解决，而我们最大的目标是尽可能自然地引入分析学中一些核心的想法，工具和例子，作为各位深入学习的垫脚石.

1 基础概念和技术

映射$\Phi:\mathbb{R}\to \mathrm{S}^1=\mathbb{T}, x\mapsto e^{ix}$诱导了$\mathbb{R}$上$2\pi$连续周期函数和圆周$\mathbb{T}$上的连续函数的一一对应：

$$f(\theta)=F(e^{i\theta})$$

所以周期函数的研究本质上是在(用θ参数化的)圆周上做分析:

$$\int_{\mathbb{T}} f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

(先假定以下函数均在$[-\pi,\pi]$上Riemann可积，在后续会适当地推广)

Fourier做了一个重要观察：

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx}e^{ilx}\, dx \quad (=1, l=-k) \quad (=0, l\neq -k)$$

$e^{ik\theta}$描述了频率k的自由振动，上述计算指出不同频率之间具有一种“正交无关”性，那么函数的三角级数展开就可以看做函数在不同频率上的“投影”分解：

定义1.1. S^1上的可积函数f的**Fourier系数**为

$$\widehat{f}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\, dx, k\in\mathbb{Z}$$

并记f的**Fourier级数**为

$$f(x)\sim\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx}=\mathcal{F}(f)(x)$$

并记前N项部分和为

$$S_N(x)=\sum_{|k|\leq N}\widehat{f}(k)e^{ikx}$$

计算$f(\theta)=|\theta|$的Fourier级数.

当务之急是建立Fourier级数的唯一性.

定理1.2. 设$f(\theta)$在S^1上可积，对$\forall k\in\mathbb{Z}, \widehat{f}(k)=0$，则$f(\theta)=0$在所有$f$的连续点成立.
注：由Lebesgue定理，可积函数的不连续点集零测，所以f“几乎处处”为0.
证明. 反证. 不妨设f实值，$f(0)>0$，我们希望$\widehat{f}$仅被$\theta=0$的局部控制. 于是构造一族函数：取充分小的实数$\epsilon>0$, 令

$$p(\theta)=\epsilon+\cos(\theta)$$

使得$p(\theta)>1+\epsilon/2, \forall\, |\theta|<\delta$; $p(\theta)<1-\epsilon/2, \forall\, |\theta|>\eta>\delta$. 令

$$p_k(\theta)=p^k(\theta), k\in\mathbb{N}_+$$

考虑

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)p_k(\theta)\,d\theta \tag{1}$$

那么由$\widehat{f}(k)=0$可知(1)恒为0. 现在利用p_k值的集中趋势导出矛盾. 我们有以下估计

$$\left|\int_{\eta<|\theta|\leq\pi} f(\theta)p_k(\theta)\,dx\right| \leq 2\pi M(1-\frac{\epsilon}{2})^k$$

$$\int_{|\theta|<\delta} f(\theta)p_k(\theta)\,dx \geq \delta f(0)(1+\frac{\epsilon}{2})^k$$

并且可以选取η使p,f在$|\theta|\leq\eta$非负，即

$$\int_{\delta<|\theta|<\eta} f(\theta)p_k(\theta)\,dx \geq 0$$

令$k\to+\infty$即得到矛盾. $\square$

下面建立我们的第一个收敛性定理.

定理1.3. 设$f\in C(\mathbb{T})$. 若f的Fourier级数**绝对收敛**，即

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(k)\right| < \infty$$

则函数列$\{S_N(x)\}$一致收敛于$f(x)$.

证要. 运用Weierstrass判别法立得一致收敛性. 所以连续函数

$$g(x)=\lim_{N\to\infty} S_N(x)$$

是良定义的. 计算f,g的各项Fourier系数，并运用定理1.2. $\square$

受定理1.3启发，我们希望找出一些函数，它们的Fourier级数绝对收敛.

定理1.4. 设$f\in C^m(\mathbb{T})$(m阶连续可微)，则存在不依赖于k的常数C满足

$$\left|\widehat{f}(k)\right| \leq \frac{C}{(1+|k|)^m}$$

证要. 利用可微性我们可以使用分部积分(利用周期性使端点值抵消)：

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{ik}\int_{\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\,dx \\
&= ...... \\
&= \frac{1}{(ik)^m}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x)e^{ikx}\,dx
\end{aligned}$$

推论1.5. 设$f\in C^2(\mathbb{T})$，则f的Fourier级数一致收敛于f.

下面将从两个角度来观察这个定理.

函数的光滑性与频率的衰减

首先，定理1.4实际上建立了函数光滑性与频率衰减性的关系，可以说这是Fourier分析中最核心的思想之一：利用f的Fourier系数来刻画f的性质. 下面是一些更深入的讨论.

定理1.5. 已知$\mathbb{T}$上的可积函数f，则以下命题等价：

(1) $f \in C^{\infty}(\mathbb{T})$，即$f$光滑.

(2) $\widehat{f}$具有任意次数的多项式衰减，即对$\forall N \geq 0$, 存在常数C_N，使$\forall k \in \mathbb{Z}$有

$$\left|\widehat{f}(k)\right| \leq \frac{C_N}{(1+|k|)^N}$$

证明. (1)$\Rightarrow$(2)由定理1.4立得，下面证明(2)$\Rightarrow$(1). 由条件可知$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)$绝对收敛，故$f$连续. 同理可知$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{d}{dx}(\widehat{f}(k)e^{i}kx) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} ik\widehat{f}(k)e^{ikx}$也是一致收敛的. 将求导与积分交换可知$f \in C^1(\mathbb{T})$，依次类推即得证. □

可微性体现了函数(非常强)的光滑性，下面我们从"振荡"的角度来刻画函数(较弱)的光滑性.

定义1.6. 给定$0 < \alpha < 1$. 若对于$f \in \Omega$存在常数$C > 0$，满足对$\forall x, y \in \Omega$都有

$$|f(x) - f(y)| \leq C\,|x-y|^{\alpha}$$

则称f为Ω上的$\alpha-$**Hölder连续函数**，记为$f \in C^{\alpha}(\Omega)$.

定理1.7. 已知$f \in C^{\alpha}(\mathbb{T}), \alpha \in (0,1)$. 则存在不依赖于$k$的常数$C$，

$$\left|\widehat{f}(k)\right| \leq \frac{C}{|k|^{\alpha}}, |k| \geq 1$$

证明. (1)取满足定义1.6的常数C. 下面是利用周期"平移"的技术：

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}\,dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx+i\pi}\,dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ik(x-\frac{\pi}{k})}\,dx \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\frac{\pi}{k})e^{ikx}\,dx
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{f}(k)\right| &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x)-f(x+\frac{\pi}{k}))e^{ikx}\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{4\pi}\int_{\pi}^{\pi}\left|f(x+\frac{\pi}{k})-f(x)\,dx\right| \\
&\le \frac{\pi}{2}\cdot C\cdot\frac{1}{|k|^{\alpha}}
\end{aligned}$$

类似的还可以得到Fourier分析中的一个核心定理(弱化版本)：

定理1.9.(弱化的Riemann-Lebesgue引理) 设$f\in C(\mathbb{T})$，则有

$$\lim_{|k|\to\infty}\widehat{f}(k)=0$$

证明留作简单的练习(doge).

注. 实际上上述(1)⇒(2)的估计是最佳的(即α不能再小)，我们给出一个富有启发的例子：

例1.10. 对于$\alpha\in(0,1)$，考虑级数

$$f_{\alpha}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k\alpha}}e^{i2^{k}x}$$

显然$f\in C(\mathbb{T})$. 现在对$\forall x,h$，我们运用所谓的"二进分解(dyadic decomposition)"的思想来估计$f(x+h)-f(x)$：事先取好一个大数N，

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{2^{k}\le\frac{1}{N|h|}}\frac{1}{2^{k\alpha}}(e^{i2^{k}(x+h)}-e^{i2^{k}x})+\sum_{2^{k}>\frac{1}{n|h|}}\frac{1}{2^{k\alpha}}(e^{i2^{k}(x+h)}-e^{i2^{k}x})$$

我们分别估计第一项I_1和第二项I_2. 对于I_2，我们直接利用Fourier系数的迅速衰减：

$$|I_2|\le\sum_{2^{k}>\frac{1}{N|h|}}\frac{2}{2^{k\alpha}}\le C_1\,|h|^{\alpha}$$

对于I_1，注意到$2^{k}\,|h|$在取N充分大时会趋近0，满足估计$\left|e^{i\theta}-1\right|\le 2\,|\theta|$：

$$
\begin{aligned}
|I_1| &\le \sum_{2^k \le \frac{1}{N|h|}} \frac{1}{2^{k\alpha}}(e^{i2^k h}-1) \\
&\le \sum_{2^k \le \frac{1}{N|h|}} \frac{1}{2^{k\alpha}} 2^{k+1}|h| \\
&= 2|h| \sum_{2^k \le \frac{1}{N|h|}} 2^{k(1-\alpha)} \\
&\le 2|h| \cdot C_2 (\frac{1}{N|h|})^{1-\alpha} \\
&= C_3 |h|^\alpha
\end{aligned}
$$

故$f \in C^\alpha(\mathbb{T})$.(请大家自行验证常数对于$x, h$的独立性)

微分与乘子

现在来看另一个角度. 定理1.4的证明给出了一个重要计算：

$$\widehat{f'}(k) = ik\widehat{f}(k)$$

那么物理空间的微分等价于频率空间上的多项式乘子. 已知微分(算子)在$C^1(\mathbb{T})$上线性，这也给出了微分的"对角化". 我们表示成下面(不严谨)的交换图表：

$$
\begin{array}{ccc}
C^1(\mathbb{T}) & \xrightarrow{\frac{d}{dx}} & C(\mathbb{T}) \\
\mathcal{F}\downarrow & & \downarrow\mathcal{F} \\
L^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\cdot ik]{} & L^2(\mathbb{Z})
\end{array}
$$

事实上大家还可以自行验证以下计算：

平移$\tau_h f(x) := f(x+h)$. $\widehat{\tau_h f}(k) = \widehat{f}(k)e^{ikh}$

例1.11. 下面考虑一维热方程的初值问题：

$$(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta)u(x,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x) \in C(\mathbb{T})$$

在$\mathbb{T} \times \mathbb{R}$上考虑方程，"预设"解$u(x,t) \in C^2(\mathbb{T} \times \mathbb{R})$，对$u\mid_x$的Fourier变换就是合法的：

$$-k^2 \widehat{u}(k,t) = \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(k,t)$$

问题变成了求解关于t的ODE，对角化的威力！得到$\widehat{u}(k,t) = A(k)e^{-k^2 t}$，$A(k)$是$\mathbb{Z}$上的函数. 代入初值条件即有

$$\widehat{u}(k,t) = \widehat{f}(k)e^{-k^2 t}$$

那么：

$$u(x,t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(k)e^{-ikx}\cdot e^{-k^2t}$$

(1) 解的光滑性？

(2) 解是否符合边值/初值？

这又归结为

(3) 物理空间的什么运算对应了频率空间的乘积？(即运算$*$: $\widehat{f*g}=\widehat{f}\cdot\widehat{g}$)

下一节我们会引入(3)中的————可能是Fourier分析中最重要的————运算：卷积.

卷积与恒等逼近

考虑$f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$的Fourier部分和

$$\begin{aligned}
S_N(f)(x) &= \sum_{|k|\le N}\widehat{f}(k)e^{ikx}\\
&= \sum_{|k|\le N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{ik(x-y)}\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\cdot(\sum_{|k|\le N}e^{ik(x-y)})\,dy
\end{aligned}$$

定义**Dirichlet核**(Dirichlet kernel)为

$$\begin{aligned}
D_N(x) &= \sum_{|k|\le N}e^{ikx}\\
&= \frac{e^{i(N+1)x}-e^{-iNx}}{e^{ix}-1}\\
&= \frac{e^{i(N+\frac{1}{2})x}-e^{-i(N+\frac{1}{2})x}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}\\
&= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x},\quad x\neq 2k\pi;
\end{aligned}$$

$$D_N(f)(x)=2N+1,\quad x=2k\pi.$$

不难验证$D_N\in C(\mathbb{T})$. 那么就有等式$S_N(f)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)D_N(x-y)\,dy$. 据此我们定义**卷积**(convolution)$*:R(\mathbb{T})\times R(\mathbb{T})\to R(\mathbb{T})$

$$f*g(x)=\int_{\mathbb{T}}f(y)g(x-y)\,dx$$

命题1.12. 设$f,g,h\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$，则

(1) $(f+g)*h=f*h+g*h,\quad(\lambda f)*g=\lambda(f*g)$；

(2) $f*g=g*f$；

(3) $f*(g*h)=(f*g)*h$；

(4)(正则化) $f*g\in C(\mathbb{T})$；

(5)(Fourier乘子) $\widehat{f*g}=\widehat{f}\cdot\widehat{g}$.

(1)直接利用定义即可. 但其他部分就很微妙了. 我们先对$f,g,h\in C(\mathbb{T})$证明命题. 对于(2)，令$F(y)=f(y)g(x-y)$，利用周期“平移”就可以得到

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(y)\,dy=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-y)\,dy$$

对于(3)，简单地积分换序和换元即可. 对于(4)，$f\in C(\mathbb{T})$连续，有上界M；注意到g在$\mathbb{T}$上一致连续. 对$\forall\epsilon>0$，存在$\delta>0,\forall x_1,x_2\in\mathbb{T},|x_1-x_2|<\delta$，有$|g(x_1)-g(x_2)|<\epsilon$. 那么

$$\begin{aligned}
|(f*g)(x_1)-(f*g)(x_2)| &\le \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}[g(x_1-y)-g(x_2-y)]\,dy\right|\\
&\le \frac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(y)|\,dy\\
&\le \epsilon M
\end{aligned}$$

对于(5)，

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)e^{-ikx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)g(x-y)\,dy)e^{-ikx}\,dx\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iky}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x-y)e^{-ik(x-y)}\,dx)\,dy\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)e^{-iky}(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)e^{-ikx)}\,dx)\,dy\\
&= \widehat{f}(k)\cdot\widehat{g}(k)
\end{aligned}$$

证明依赖于连续性，但如果能够利用性质较好的函数(比如连续函数)去(以何种方式？)“逼近”可积函数，运算就是自然的. 下面建立一个在理论和思维上都富有教益的引理.

引理1.13. 设$f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$，则对$\forall\epsilon>0$，存在$f_\epsilon\in C(\mathbb{T})$满足

$$\int_{\mathbb{T}}|f_\epsilon(x)-f(x)|<\epsilon$$

引理的证要. 根据Riemann积分的Darboux和定义，$f(x)$的积分可以用阶梯函数逼近，而阶梯函数每个间断点处都可以在任意小的邻域上用连续直线“拟合”. □

命题的证明. 利用引理可获得连续函数列$\{f_k\},\{g_k\}$，f_k*g_k连续. 下面是经典的”稠密性技巧”(density argument)：

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}}|f_k(x)-f(x)|=\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{T}}|g_k(x)-g(x)|=0$$

现在$f*g-f_k*g_k=(f-f_k)*g+f_k*(g-g_k)$，且$f,g$有界$M$，则

$$|(f-f_k)*g|\le\frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-y)-f_k(x-y)|\,dy\to 0,\quad k\to\infty$$

对于$f_k*(g-g_k)$同理. 注意收敛关于x是一致的，故$f*g$连续，(4)成立；
对于(5)，由f_n*g_n一致收敛于$f*g$，有$\widehat{f_n}(k)\cdot\widehat{g_n}(k)=\widehat{f_n*g_n}(k)\to\widehat{f*g}, \quad n\to\infty$. 另一方面

$$\left|\widehat{f}(k)-\widehat{f_n}(k)\right|=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-f_k(x)|\,dx$$

(5)成立；(2)(3)类似，留给各位验证. □

利用稠密性技巧我们可以证明Fourier分析的一个核心定理.

定理1.14.(Riemann-Lebesgue引理version.1) 设$f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$，

$$\lim_{|k|\to\infty}\widehat{f}(k)=0$$

注1. 引理1.13给予我们一种"度量"可积函数的手段：$\|f\|_1:=\int_{\mathbb{T}}|f|$，这与以往使用的$\|f\|:=sup_{x\in\mathbb{T}}|f|$大不相同. 而引理可以理解为$\|\cdot\|_1$的"度量"下$C(\mathbb{T})$在可积函数类中稠密，使得在积分“作用”下结论可以“连续”地过渡(如果用$\|\cdot\|$还稠密吗？). 我们也许会在下or下下节课(?)具体阐述这些重要的对象.
注2. 我们回到例1.11中的热方程. 令

$$H_t(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}e^{-k^2t}\cdot e^{ikx}$$

由一致收敛性和$\widehat{f}(k)$有界易知H_t在$\mathbb{T}$上光滑，称之为$\mathbb{T}$上的**热核**. 于是得到级数解

$$u(t,x)=(f*H_t)(x)$$

而下面命题进一步指出卷积能够提升"正则性"：

命题1.15. 设$f\in\mathcal{R}(\mathbb{T}),g\in C^k(\mathbb{T})$. 则有$f*g\in C^k$

$$D^i(f*g)=(f*D^ig),\quad\forall i\le k$$

命题的证明. 计算

$$\begin{aligned}
& f*g(x+\Delta x)-f*g(x_0)-(f*D^1g)(x)\cdot\Delta x\\
= & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)[g(x+\Delta x-y)-g(x-y)]\,dy-(f*D^1g)(x)\cdot\Delta x\\
\le & \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(y)[(D^1g)(x-y)\cdot\Delta x+o(\Delta x)]\,dy-(f*D^1g)(x)\cdot\Delta x\\
= & o(\Delta x)
\end{aligned}$$

故$f*g\in C^1(\mathbb{T})$. 由归纳法命题得证. □
运用命题1.15就获得了解$u(x,t)$的光滑性. 这样就回答了问题(1).
(PS. 一个有趣的物理思考可以"证明"H_t恒正...)

为了回答Fourier级数收敛性以及上面所提到的边界稳定问题等等，研究f和一个函数族的卷积与f的关系就非常必要了. 对于卷积我们还有一种观点:

$f*g$是对g在x处用f的值分布来加权.

例1.16 设$f\in\mathcal{R}(B_1)$，令$g=\frac{1}{|B_1|}\cdot\mathbf{1}_{B_1}$，那么$f$的**球平均**

$$A(f)(x):=\frac{1}{|B_1|}\int_{B_1}f(x-y)dy=f*g(x)$$

受上面启发，下面引入(非常重要的)**恒等逼近**(approximation to the identity)的概念.

定义1.17. 我们称一族函数$\{K_n\}$是$\mathbb{T}$上的恒等逼近，当且仅当

(1) $\forall n\geq 0$，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(x)\,dx=1;$$

(2) 存在$M>0$，$\forall n\geq 0$，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(x)|\,dx\leq M;$$

(3) 对$\forall\delta>0$，

$$\int_{|x|>\delta}|K_n(x)|\,dx\to 0,\quad n\to\infty.$$

定理1.18. 设$\{K_n\}$是$\mathbb{T}$上的恒等逼近，$f\in\mathcal{C}(\mathbb{T})$. 则有一致收敛：

$$\lim_{n\to\infty}f*K_n(x)\to f(x)$$

证明. 利用连续性，

$$\begin{aligned}
&2\pi\,|f*K_n(x)-f(x)|\\
=\ &\left|\int_{-\pi}^{\pi}K_n(y)[f(x-y)-f(x)]\,dy\right|\\
\leq\ &(\int_{|y|>\delta}+\int_{\delta<|y|\leq\pi})\,|K_n(y)|\cdot|f(x-y)-f(x)|\,dy\\
\leq\ &\epsilon\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,dy+2\sup_{x\in\mathbb{T}}|f(x)|\cdot\int_{\delta<|y|\leq\pi}|K_n(y)|\,dy
\end{aligned}$$

由定义可知收敛性以及收敛与x的独立性. □

定理1.19. 当$f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$，证明$\|f*K_n-f\|)_1\to 0,\quad n\to\infty$，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f*K_n(x)-f(x)|\,dx=0$$

证要. 运用“稠密性技巧”. □

下面是一个重要的例子，我们会在后面无穷次遇到它.

例1.20.(磨光子) 选取恒正，径向的$\rho(x)\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$满足$\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)\,dx=1$(比如Gauss分布函

数$e^{-\pi x^2}\in C_0^\infty(\mathbb{R})$). 构造函数列$\{\rho_\epsilon\}_{\epsilon>0}$

$$\rho_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon^n}\rho(\frac{x}{\epsilon})$$

请各位证明$\epsilon\to 0$时**磨光子**(mollifiers)$\{\rho_\epsilon\}$是恒等逼近. 进而可以用于光滑逼近(与引理1.13比较).

补充：稠密性技巧

(这是课堂上一时兴起临时补充的，也算是为下下节课做点铺垫) 前面讲到的稠密性技巧是分析中的惯用套路，下面我们来系统挖掘其中的理论.

定义1.21. 给定$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$上的向量空间X. 如果存在映射$\|\cdot\|:X\to[0,+\infty]$满足

(1)(三角不等式) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$;

(2)(仿射关系) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$，$\forall\lambda\in\mathbb{C}$;

(3)(正规化) $\|0\|=0$

则称$\|\cdot\|$是X上的**范数**，X是一个**赋范向量空间**. 往后不加说明的话我们讨论的空间都是赋范向量空间.

值得注意，X是一个度量空间(赋予度量拓扑$d(x,y)=\|x-y\|$)，于是数分的收敛，极限(点)，稠密，连续等概念可以搬运到X上；同时高代的线性映射可以平行地推广为两个赋范向量空间之间的线性算子.

例1.22. 以下都是分析中常用的例子，请各位自行验证：

(a) $\mathbb{R}^d$定义的长度;

(b) $C([a,b])$上定义的$\|f\|_\infty:=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$;

(c) $\mathcal{R}([a,b])$上定义的$\|f\|_1:=\int_a^b|f|\,dx$

现在回到命题1.12.(4)的证明. 可以发现证明的核心是对$(f-f_k)*g$的估计，其中利用了g有界和$\|f-f_k\|_1$，这并非偶然的技巧.

定义1.22. 线性算子$T:X\to Y$是**有界**的，当且仅当存在$C\ge 0$满足

$$\|Tx\|_Y\le C\,\|x\|_X$$

下面的命题指出了算子的有界性是验证连续性极好的方法.

命题1.23. T连续 $\Leftrightarrow$ T在0处连续 $\Leftrightarrow$ T有界.

证要. 利用范数的仿射性质即可. □

容易看出X,Y之间的所有线性算子构成了线性空间$L(X,Y)$，上面可以定义**算子范数**：

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\|:\|x\|_X=1\}\\ &= \inf\{C:\|Tx\|\le C\,\|x\|_X,\forall x\in X\}\end{aligned}$$

综上，给定g后，可以将$(f-f_k)*g$理解为一个$C(\mathbb{T})_{\|\cdot\|_1}$上的有界(请验证)线性算子：

$$T:C(\mathbb{T})_{\|\cdot\|_1}\to C(\mathbb{T})_{\|\cdot\|_\infty}, f\mapsto f*g$$

稠密性引理1.13已经给出$C(\mathbb{T})$在$\mathcal{R}(\mathbb{T})_{\|\cdot\|_1}$，而数分的重要结论“一致收敛的连续函数列收敛于连续函数”指出$C(\mathbb{T})_{\|\cdot\|_\infty}$是完备空间！(注意，对空间赋予不同范数会很大改变空间的性质，例如$C(\mathbb{T})_{\|\cdot\|_1}$就不完备) 那么我们能否利用算子的连续性将$T$延拓到$\mathcal{R}(\mathbb{T})$上，这样完备性就给出了命题1.12.(4)的证明.

定理1.24.(有界线性算子的延拓) 给定向量空间$(X,\|\cdot\|_X),(X',\|\cdot\|_X),(Y,\|\cdot\|_Y)$，其中$X'\subset X$在$X$中稠密(在$\|\cdot\|_X$拓扑下)，$Y$完备. 设线性算子$T':X'\to Y$有界，则存在唯一的有界线性算子$T:X\to Y$满足$T\mid_{X'}=T'$. 即有交换图

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "T'"'] & X \arrow[d, "T"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

证明. 先构造T: 对$\forall x\in X$，任取一个X'中的列$\{x'_n\},\lim_{n\to\infty}x'_n=x$，那么定义

$$T(x):=\lim_{n\to\infty}T'(x'_n)$$

由T'连续性和Y的完备性，极限存在. 由极限的线性性可知T是线性算子. 为了证明定义是良定义，考虑另一个X'中的列$\{y'_n\},\lim_{n\to\infty}y'_n=x$，因为

$$\|T'(y'_n)-T'(x'_n)\|_Y=\|T'(y'_n-x'_n)\|_Y\le C\,\|y'_n-x'_n\|_Y$$

$\lim_{n\to\infty}\|T'(y'_n)-T'(x'_n)\|_Y=0$，$T(x)$是良好定义的. 特别地，

$$\|T(x)\|_Y=\lim_{n\to\infty}\|T'(x'_n)\|_Y\le\lim_{n\to\infty}C\,\|x'_n\|_X=C\,\|x\|_X$$

T有界；而唯一性直接利用稠密性和T'连续性获得. □

注. 这个看似显然的命题是分析学中的一条故事线：对于连续映射，只需考虑它在定义域的一个稠密子集(如果有的话)上的取值(比如数分中，$\mathbb{R}$上的连续函数完全由它在$\mathbb{Q}$上的取值决定.) 而后面我们会知道，(紧支撑)光滑函数在许多重要的函数类中稠密，这意味着我们可以在性质极好的光滑函数空间上先定义线性算子(微分，Fourier变换etc)并选择恰当的范数使其有界，然后再延拓到更广的函数类上(广义导数，缓增分布上的Fourier变换etc)，这是课程后面引入分布理论的两个核心思路之一.

练习 请利用稠密性技巧和定理1.9证明定理1.14(Riemann-Lebesgue引理).

提示 先给$\mathbb{R}$上的(双向)数列空间$\{\{x_n\}:\lim_{|n|\to\infty}x_n=0\}$赋予一个恰当的范数使其完备.

2 Fourier级数的收敛性(Ⅰ)：求和，局部化

本章将介绍Fourier级数理论初期的一些经典结论，帮助读者熟悉上一章提到的若干概念与工具.

Dirichlet核，Fejér核

这一节我们应用卷积的性质来初步研究Fourier级数的收敛性. 自然的我们想验证Dirichlet核是否是恒等逼近. 很遗憾结论是否定的，这说明Fourier收敛性问题非常复杂，即使连续点都可能发散.

命题2.1. 记Dirichlet核为D_N，则

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x)\,dx = 1;$$

但存在常数C,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx \geq C\log N, N \to +\infty.$$

证要. $D_N(x)=\sum_{|k|\leq N} e^{ikx}$积分即可得到第一个结论. 对于第二个结论，观察$D_N=\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}$可知第一个结论成立源于$D_N$的振荡. 又$D_N$是偶函数，于是有下面的计算

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_N(x)|\,dx \\
= & \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{1}{2}x}\right| dx \\
= & \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\frac{1}{2}x}\right| dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\sin(N+\frac{1}{2})x\right|(\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}-\frac{2}{x})\,dx
\end{aligned}$$

利用估计$x-\frac{x^3}{6}<sinx<x, x\in(0,\pi)$，有$\left|\frac{1}{\sin\frac{1}{2}x}-\frac{2}{x}\right|\leq\frac{x}{6}$，于是第二项是$O(1)$阶的. 只需考虑第一项

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\frac{1}{2}x}\right| dx \\
= & \frac{2}{\pi}\int_0^{(N+\frac{1}{2})\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \\
= & \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{N-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx + \frac{2}{\pi}\int_{N\pi}^{(N+\frac{1}{2})\pi}\left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \\
= & \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N-1}\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin x}{x+k\pi}\right| dx + O(\frac{1}{N})
\end{aligned}$$

之后就是基本操作了. □

有什么办法消去振荡吗？下面引入**Cesàro求和**σ_N：

$$\sigma_N = \frac{S_1+S_2+...+S_N}{N}$$

最直观的例子是发散级数1+(−1)+1+(−1)+...在Cesàro求和意义下收敛. 那么定义**Fejér核**F_N:

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k \\ &= \frac{1}{N}(\frac{\sin\frac{N}{2}x}{\sin\frac{x}{2}})^2, \quad x \neq 2k\pi; \\ F_N(x) &= N, \quad x = 2k\pi. \end{aligned}$$

最后的等式证明与Dirichlet核的公式相似. 那么

$$\sigma_N(f)(x) = f * F_N(x)$$

很容易看出Fejér核满足恒等逼近的条件(1)(2). 对于条件(3)，由$\forall\delta > 0, |x| \in [\delta, \pi]$:

$$|F_N(x)| \leq \frac{1}{N}(\frac{2}{\delta})^2(\sin\frac{N}{2}x)^2 \leq \frac{1}{N\delta^2}$$

即可知$\{F_N\}_{N\in\mathbb{Z}}$是恒等逼近.

定理2.2.(Fejér定理) 设$f \in C(\mathbb{T})$，则$\sigma_N(f)(x)$一致收敛于f.

逐点收敛方面则可以放宽：

定理2.3.(Fejér定理) 设$f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. 若$f$在点$x$有左，右极限，则

$$\sigma_N(f)(x) \to \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], \quad N \to \infty$$

证明. 利用恒等逼近条件(1)(重要技巧!)以及F_N是偶函数，

$$\begin{aligned} &\left|\sigma_N(f)(x) - \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]\right| \\ \leq\ & \frac{1}{\pi}(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi)F_N(t)\cdot(\frac{|f(x+t) - f(x^+)| + |f(x-t) - f(x^-)|}{2})\,dt \end{aligned}$$

第一项由左右极限得出$o(1)$估计，第二项由F_N的衰减得出$O(\frac{1}{N})$估计(重要). □

注. 由此可知如果f在x处的Fourier级数收敛，那么一定收敛于$\frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$.

特别地，F_N还有另一个表达

$$F_N(x) = \sum_{|k|\leq N}(1 - \frac{|k|}{N})e^{ikx}$$

则

$$\sigma_N(f)(x) = \sum_{|k|\leq N}(1 - \frac{|k|}{N})\widehat{f}(k)e^{ikx}$$

是一个三角多项式$P(e^{ix})$. 于是我们证明了$\mathbb{T}$上的Weierstrass定理：

定理2.4. 设$f \in C(\mathbb{T})$. 对$\forall \epsilon > 0$，存在一个三角多项式$P_\epsilon(e^{ix})$满足

$$\|f - P_\epsilon\| < \epsilon$$

注. 定理说明在$\|\cdot\|$度量下，三角多项式在$C(\mathbb{T})$中稠密. 如此得到了三角函数系$\langle e^{ikx} \rangle_{k\in\mathbb{Z}}$的完备性.

局部化定理，收敛性判别法

前面几个定理暗示了一个事实：f在点x处的Fourier级数收敛性只由x的局部决定. 这很不平凡，因为Fourier级数是整个$\mathbb{T}$上积分定义的.

定理2.5.(局部化定理) 设$f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. 给定任一$x \in \mathbb{T}, \delta > 0$，如果

$$f\mid_{(x-\delta,x+\delta)} = g\mid_{(x-\delta,x+\delta)}$$

则

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) - S_N(g)(x) = 0$$

证明. 这是Riemann-Lebesgue引理的使用“模板”.

$$\begin{aligned} & S_N(f)(x) - S_N(g)(x) \\ = & \int_0^\pi [f(x-y) + f(x+y) - g(x-y) - g(x+y)]\, dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & \int_\delta^\pi [f(x-y) + f(x+y) - g(x-y) - g(x+y)]\, dy \\ = & \int_{-\pi}^\pi \sin(N+\frac{1}{2})y \cdot [\frac{f(x-y) + f(x+y) - g(x-y) - g(x+y)}{\sin\frac{x}{2}} \cdot \mathbf{1}_{\delta\le|y|\le\pi}]\, dy \end{aligned}$$

然后检验R-L引理的条件. □

注. 局部化定理表明Fourier收敛性取决于Dirichlet核的振荡频率与f在局部上振荡幅度的关系. 各种收敛性判别法(以及发散的反例)都建立在这个观点上，下面仅给出一个例子供大家体会：

定理2.6.(Dini判别法) 设$f \in \mathcal{R}(\mathbb{T}), x \in \mathbb{T}$满足

$$\left| \int_0^\pi \frac{|f(x-y) + f(x+y) - 2f(x)|}{y}\, dy \right| < \infty$$

则$S_N(f)(x) \to f(x), N \to \infty$.

证要. 利用$\frac{y}{\sin\frac{y}{2}}$在$\mathbb{T}$上有界. □

定理2.7.(Jordan判别法) 设f在点x的邻域上有界变差，则

$$S_N f(x) \to \frac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)], \quad N \to \infty$$

证要. 根据有界变差函数的结构，不妨设f单调. 将$f * D_N$截断为$|y| < \epsilon$和$\epsilon \geq |y| \leq \pi$. 第二段用R-L引理；第一段运用积分第二中值定理，并将Dirichlet核的分母$sin(y/2)$换做$y/2$并有误差估计：

$$\left|\frac{1}{\sin(\frac{y}{2})} - \frac{2}{y}\right| \leq Ct, \quad |y| \leq \epsilon$$

C是常数. 最后变量代换得到著名的Dirichlet积分(实际上上述代换正是我们在数学分析中求Dirichlet积分的方法).

在进入更深入的话题前我们插播一节习题课介绍一些有趣的专题，顺便腾出无实变基础的同学阅读预习材料的时间(实际是给懒惰的笔者写材料的时间罢

习题

据说某年丘赛分析组的一道面试题

原题只有最后两问. 第1问出自菲砖，可以作为原题的提示.

A1. 设$f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$，且上下界分别为$M, m$. 证明对$\forall N \in \mathbb{N}_+$

$$m \leq \sigma_N f(x) \leq M, \quad \forall x \in \mathbb{T}$$

A2. 设$f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$，$|f| < M$. 设对应的Fourier级数

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

且存在一致的常数B：

$$kc_k \leq B, \forall k \in \mathbb{Z}$$

证明对$\forall N \in \mathbb{N}_+$，

$$|S_N f(x)| \leq M + 2K$$

A3. 保持A2中的Fourier系数估计. 请问当f满足什么条件时，$S_N f$一致收敛于f?

du Bois-Reymond的发散反例

之前的判别法也暗示了仅给予连续性并不足以使Fourier级数收敛. 下面我们着手复现一个连续函数在一点处Fourier级数发散的著名反例(du Bois-Reymond, 1876).

B1. 证明函数列

$$S_N(x) := \sum_{1 \leq |k| \leq N} \frac{e^{ikx}}{k}$$

对在$x \in [-\pi, \pi]$上一致收敛.

B2. 设

$$S_N^-(x) = \sum_{-N\le k\le -1} \frac{e^{ikx}}{k}$$

证明$S_N^-(x)$在闭区间$[a,b]$一致收敛当且仅当$2k\pi \notin [a,b], \forall k \in \mathbb{Z}$.

对$N \in \mathbb{N}_{\ge 1}$，定义

$$W_N(x) := e^{ix\cdot 2N} S_N(x)$$

$$W_N^-(x) := e^{ix\cdot 2N} S_N^-(x)$$

对$f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$，定义$f$的谱

$$spec(f) := \{k \in \mathbb{Z} \mid \widehat{f}(k) \neq 0\}$$

B3. 设$\mathbb{N}_{\ge 1}$上的数列$\{N_n\}$满足$N_{n+1} > 3N_n$，证明所有$W_{N_j}(x)$的谱都不相交.

B4. 设级数

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} W_{N_n}(x)$$

证明$f \in C(\mathbb{T})$.

B5. 请构造一个$\{N_n\}$满足f的Fourier级数在点$x=0$处发散.
提示. 考虑f的Fourier级数前$2N_n$项部分和.

正定函数的Fourier刻画

给定$f \in C(\mathbb{T})$，称f是正定的，当且仅当对$\forall m \in \mathbb{N}_{\ge 1}, \forall x_a \in \mathbb{R}, c_a \in \mathbb{C}, a = 1, 2, ..., m$都有

$$\sum_{a=1}^{m}\sum_{b=1}^{m} x_a f(x_a - x_b)\overline{x_b} \ge 0$$

C1. 设$f \in C(\mathbb{T})$正定，证明对$\forall g \in C(\mathbb{T})$都有

$$(\frac{1}{2\pi})^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x) f(x-y)\overline{g(y)}\, dxdy \ge 0$$

C2. 设$f \in C(\mathbb{T})$正定，证明$\widehat{f}(k) \ge 0, \forall k \in \mathbb{Z}$.

C3. 给定有限Fourier级数$(N \in \mathbb{N})$

$$f(x) = \sum_{|k|\le N} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

设$\widehat{f}(k) \ge 0, \forall\, |k| \le N$，证明$f$正定.

C4. 设$f \in C(\mathbb{T})$满足设$\widehat{f}(k) \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z}$，证明$f$正定.
提示. 运用Féjer核.

遍历：Weyl等分布判别法

给定$[0,1]$上的数列$\{x_n\}$和闭区间$[a,b]$，设$\{x_n\}$在$[a,b]$上的自然密度

$$D_N([a,b]) = \frac{|\{x_n \mid n \leq N, x_n \in [a,b]\}|}{N}$$

称$\{x_n\}$在$[0,1]$上等分布，当且仅当$\lim_{N\to\infty} D_N([a,b]) = b - a, \forall a, b \in [0,1]$.

D1. 设$\{x_n\}$在$[0,1]$上等分布，证明$\{x_n\}$在$[0,1]$上稠密. 但反之不成立.

D2. 证明$\{x_n\}$在$[0,1]$上等分布当且仅当

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{[a,b]}(x_n) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}(x)\, dx$$

其中$[a,b]$的特征函数$\mathbf{1}_{[a,b]}(x) : (= 1, x \in [a,b]) \quad (= 0, x \notin [a,b])$.

D3. 证明$\{x_n\}$在$[0,1]$上等分布当且仅当对$\forall f \in C([0,1])$都有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

D4. 将C3中的$\forall f \in C([0,1])$分别换为$\forall f \in \mathcal{R}([0,1])$，$\forall f \in L([0,1])$(Lebesgue可积)是否还成立？

D5. 证明Weyl判别法：$\{x_n\}$在$[0,1]$上等分布当且仅当对$\forall k \neq 0$都有

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \cdot k x_n} = 0$$

D6. 验证$\{\{n\xi\}\}_{\xi \notin \mathbb{Q}}$，$\{\{an^k\}\}_{a\in\mathbb{R}, k\in(0,1)}$，$\{\{a\log(n)\}\}_{a\in\mathbb{R}}$是否等分布(内层的$\{\cdot\}$指取小数部分).

3　从$\mathbb{T}$到$\mathbb{R}^n$：L^1和L^2空间上的Fourier变换

这一章将引入欧式空间上的Fourier变换，并建立$\mathbb{T}$和$\mathbb{R}^n$分析之间的联系. 前面几节课已经提供了不少例子和想法，它们可以被系统地整理进函数空间理论当中. 将函数按各种指标分类，将函数类看成一个整体空间以及研究函数空间之间的关系是古典分析与现代分析的分水岭. 往后章节里笔者将努力在Fourier分析的背景板下呈现这段历史进程之一隅.

L^p空间基础，$\mathbb{R}^n$上的恒等逼近

(一些基础概念落在讲义第一章最后的"稠密性技巧补充". 同时在本节课及往后我们会直接使用实变的相关概念，不再特别说明.)

引理3.1.(完备性判别) 设赋范向量空间$(X, \|\cdot\|)$，则
(1) 如果$(X, \|\cdot\|)$完备，则X上的绝对收敛级数$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$$

在X中收敛.
(2) 如果X上的每个绝对收敛级数都(依范数)收敛，那么$(X, \|\cdot\|)$是完备的. 我们称完备赋范向量空间为**Banach空间**.
证要. (1)：部分和$S_n := \sum_{k=1}^{n}$，有$\|S_n - S_m\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\|$，利用$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$绝对收敛即可. □
(2)：(子列选择技巧)取Cauchy列$\{x_k\} \subset X, x_0 = 0$，则对任意$n \in \mathbb{N}$，存在$N_n > 0$，对$\forall i, j \ge N_n$，

$$\|x_i - x_j\| \le \frac{1}{2^n}$$

那么考虑子列$x_{N_n} = \sum_{k=1}^{n}(x_{N_k} - x_{k-1})$，那么$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k-1})$绝对收敛，故$x := \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_{k-1}) \in X$，而Cauchy列和它的子列收敛于同一个极限. □

定理1.24启发我们研究一类重要的函数空间$L^p(\mathbb{R}^n)/L^p(\mathbb{T})$，它们在积分意义下完备(下面我们只对$\mathbb{R}^n$情形讨论，$\mathbb{T}$请各位自行搬运相应的结论).

定理3.1. 设$1 \le p < \infty$. 集合L^p**空间**：

$$L^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty\}$$

赋予范数

$$\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p)^{\frac{1}{p}}$$

是Banach空间.
注. 严格地说，L^p应当要商调所有几乎处处为0的函数，因为应把绝对积分相同的函数视为同一个. 另外f的值域应当扩大为$\mathbb{C}$，但这是平凡的操作了.

$L^p(\mathbb{R}^n)$是线性向量空间自然是成立. $\|\cdot\|_p$是范数依赖于以下两个重要不等式(这里略去

证明，所需知识不超过数分一范围)：

定理3.2.(Hölder不等式) 如果$1 < p < \infty$，(共轭指标)$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，设$\mathbb{R}^n$上$f, g$可测，则

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

定理3.3.(Minkowski不等式) 如果$1 \leq p < \infty$，$f, g \in L^p$，则

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

下面着重研究完备性.

L^p完备性证明. 设$\{f_k\} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$绝对收敛：$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_p = M < \infty$. 令

$$G_n = \sum_{k=1}^{n} |f_k|, G = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$$

由Minkowski不等式，

$$\|G_n\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|_p \leq M, \forall n \geq 1$$

所以由单调收敛定理，$G \in L^p(\mathbb{R}^n)$，特别地$G(x) < \infty \quad a.e.$ 所以$F(x) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$几乎处处(逐点)收敛，并被$G$所控制，由控制收敛定理可知$F \in L^p$，引理3.1立即完成了证明. □

另外$p = \infty$时有L^∞**空间**：

$$L^\infty(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C} \mid \exists M \in \mathbb{R}_{\geq 0}, |f(x)| \leq M \quad a.e.\}$$

并赋予范数

$$\|f\|_\infty := \inf_{M \in \mathbb{R}_{\geq 0}} |f(x)| \leq M \quad a.e.$$

定理3.4. L^∞是Banach空间.

证明. 设Cauchy列$\{f_k\} \subset L^\infty$，定义

$$A_{ij} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |f_i(x) - f_j(x)| > \|f_i - f_j\|_\infty\}$$

根据定义这是零测集，所以可数并$A = \bigcup_{i,j=1}^{\infty} A_{ij}$零测. 注意对$\forall x \notin A$，$\{f_k(x)\}$是Cauchy列，所以$f(x) := \lim_{k \to \infty} f_k(x)$几乎处处有定义. 于是可以证明对$\forall \epsilon > 0$，存在$N > 0$对任意$i \geq N$,

$$\sup_{x \notin A} |f_i(x) - f(x)| < \epsilon$$

这样就证明了$f \in L^\infty$. □

注. 利用引理3.1(2)的子列选取技巧，可以证明以下重要结论(留作课前练习)

定理3.5. 设$\{f_k\}$依L^p收敛于$f(1 \le p \le \infty)$，则存在子列$\{f_{n_k}\}$逐点收敛于$f \quad a.e.$
这在证明有关积分的命题提供了不少方便(有了逐点收敛就可以想办法使用实变三大收敛定理).

练习1. 举反例，使函数列$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$满足

(1) 依L^1收敛，但不一致收敛.

(2) 依L^1收敛，但不依L^2收敛.

(3) 依L^2收敛，但不依L^1收敛.

练习2.

(1)设$f \in L^p$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q \le 1} \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot g$$

提示. 考虑$g = \frac{|f|^{p-1} sign(f(x))}{\|f\|_p^{p-1}}$.

(2)(Minkowski积分不等式) 设f是$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$上的可测函数，$1 \le p \le \infty$. 如果$f(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R}^n)$，$h(y) := \|f(\cdot, y)\|_p \in L^1(\mathbb{R}^m)$，则

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^>} f(x, y) \, dy \right\|_p \le \int_{\mathbb{R}^m} \|f(\cdot, y)\|_p \, dy$$

提示. 运用(1).

练习3. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$，$m(\Omega) < \infty$，则$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega), 1 \le p < q$.

练习4. 设$1 \le p < \infty, 1 \le q \le \infty$.

(1) 证明$L^1 \cap L^\infty$在L^q中稠密.

(2) 证明集合

$$\{f \in L^p \cap L^q \mid \|f\|_q \le 1\}$$

是L^p中的闭集.
提示. 利用定理3.5和Fatou引理.

(3) 设函数列$\{f_n\} \subset L^p \cap L^q$，$f \in L^p$. 如果$f_n$依$L^p$收敛于$f$，且$\sup_n \|f_n\|_q < \infty$，证明$f \in L^r, \forall r \in [p, q)$，且$f_n$依$L^r$收敛于$f$.

同样受定理1.24驱动，下面建立一些稠密性结论.

定理3.6. 设$1 \le p < \infty$，
(1)简单函数类$\mathcal{E}$在L^p中稠密.
证要. 用简单函数列分别单调上升逼近$(f^+)^p, (f^-)^p$，利用单调收敛定理. □
(2) 阶梯函数类在L^p中稠密.
证要. 用阶梯函数去逼近χ_E, E是可测集. 再用有限个方体覆盖逼近$m(E)$(有限个?证明已补充至附录A测度材料中). □
(3) 紧支撑连续函数类$C_c(\mathbb{R}^n)$在L^p中稠密.
(4) 光滑函数类$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$在L^p中稠密.

练习5.(平移连续性) 设$f \in L^p, 1 \le p < \infty$，定义**平移**算子$\tau_y : f(x) \mapsto f(x-y)$. 则

$$\lim_{y \to 0} \|\tau_y f - f\|_p = 0$$

(4)的证明将用到例1.20的**磨光子**，并引入$\mathbb{R}^n$上的**卷积**$*$:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)$$

定理3.7. 设$f \in L^1$.

(1) 设$g \in L^p(1 \le p \le \infty)$，则$f * g$良定义，且$f * g \in L^p$：

$$\|f * g\|_p \le \|f\|_1 \cdot \|g\|_p$$

证要. 利用Minkowski积分不等式(练习2(2)). □

(2) 设$g \in L^1$，则卷积$L^1 \times L^1 \to L^1$满足交换律和结合律.

(3) 设$f \in L^p, g \in L^q$，p, q共轭. 则$f * g$有界且一致连续.
证要. 利用C_c逼近. □

定理3.8.(正则化) 设$\varphi \in C_0^\infty$，$f \in L^p$，则$f * \varphi \in L^p \cap C_0^\infty, \partial_i(f * \varphi) = f * (\partial_i \varphi)$.
证要. 利用实变材料定理0.54. □

对于磨光子$\{\rho_t\}_{t>0}$我们总结出以下性质得到$\mathbb{R}^n$的**恒等逼近**:

(1) $\rho \in L^1, \int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1, |\rho(x)| \le C(1+|x|)^{-n-\epsilon}$;

由此可得估计:

(2) $\rho_t(x) \le C_1 \frac{1}{t^n}$;

(3) $\rho_t(x) \le C_2 \frac{t^\epsilon}{|x|^{n+\epsilon}}$.

定理3.9./练习 设$f \in C_c$，则$f * \rho_t$一致收敛于f.

下面的定理事实上证明了一系列Fourier级数求和法的L^p收敛性(然而Fourier级数直接求和法依然无效)：

定理3.10. 设$f \in L^p, 1 \le p < \infty$，则$\rho_t * f$依$L^p$收敛于$f$，即

$$\lim_{t \to 0} \|\rho_t * f - f\|_p = 0$$

定理3.10证要. L^p收敛性：换元可得$\rho_t * f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} [\tau_{tz} f(x) - f(x)] \rho(z)\, dz$. 利用Minkowski积分不等式和练习5. □

注1. 事实上可以把(4)强化为紧支撑光滑函数类$\mathcal{D}$，因为存在紧支撑的光滑函数(?):

注2. 了解Lebesgue微分定理的同学还可以证明以下定理

定理3.10'. $f * \rho_t$在f的Lebesgue集上逐点收敛，进而在$\mathbb{R}^n$上几乎处处收敛.

证要. 思路上延续了之前的“二进分解”技术. 取δ使$r < \delta$时

$$\int_{B_r} |f(x-y) - f(x)|\, dx < \epsilon\, |B_r|$$

设$2^{N-1} t < \delta \le 2^N t$，在$|x| < \delta$对$|x|$二进分解: 在中心$B_t$和环域$2^{k-1} t < |x| \le 2^k t$上分别使用估计(2)和(3). 在$|x| > \delta$利用Holder不等式即可. □

练习6. 说明$C(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty$不稠密.

练习6'.(重要) 设$g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. 如果对$\forall u \in C_c^\infty$，$\int_{\mathbb{R}^n} g \cdot u = 0$，证明$g = 0$.

提示. 令$\overline{u} = sign(g) \cdot \overline{g} \in L^1$，并磨光.

$L^1(\mathbb{R}^n)$上的Fourier变换，Fourier反演公式

定义3.11. 设$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. 定义f的**Fourier**变换：

$$\mathcal{F} : f(x) \mapsto \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \xi \cdot x}\, dx$$

定义

$$C_0(\mathbb{R}^n) := \{ f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \}$$

则利用稠密性原理(请各位自证$(C_0, \|\cdot\|_\infty)$完备性)可得

定理3.12. Fourier变换

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C_0(\mathbb{R}^n)$$

是有界线性算子：

$$\left\| \widehat{f} \right\|_\infty \le \|f\|_1$$

证要. 有界性显然. 利用稠密性和C_0完备性只需研究$\forall \varphi \in C_c^\infty$. 对于连续性，任取收敛于$\xi$的

点列并运用控制收敛定理即可；下面证明$\lim_{|\xi|\to\infty}\widehat{f}(\xi)=0$. 重点是建立衰减性和光滑性的对偶(请各位动手计算)：

(1) 函数的求导∼对应频率的乘积：$\mathcal{F}(\partial_k\varphi)(\xi)=2\pi i\xi_k\mathcal{F}(\varphi)(\xi)$

(2) 频率的求导∼对应方向的乘积：$\partial_{\xi_k}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)=\mathcal{F}(-2\pi ix_k\varphi)(\xi)$

(3) Δ是Lapalace算子. 则根据(1)有(重要公式!)

$$(1+|\xi|^2)^N\widehat{\varphi}=\mathcal{F}[(1-\Delta)^N\varphi](\xi)$$

显然$(1-\Delta)^N\varphi\in L^1$，右式有意义. 估计

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|\leq\frac{\left\|(1-\Delta)^N\varphi\right\|_1}{(1+|\xi|^2)^N)}$$

所以函数越光滑，频率衰减越快. 考虑$\varphi:\|f-\varphi\|_1<\epsilon$即完成证明. □

下面建立起一些重要的运算关系.

命题3.13. 函数的卷积对应频率的乘积：设$f,g\in L^1$

$$\widehat{f*g}=\widehat{f}\cdot\widehat{g}$$

命题3.14. 分部公式：设$f\in L^1(\mathbb{R}^n_x),g\in L^1(\mathbb{R}^n_\xi)$，则

$$\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(\xi)g(\xi)\,d\xi=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\widehat{g}(x)\,dx$$

证明是Fubini定理的简单计算.

命题3.18. 仿射变换：设$f\in L^1,v\in\mathbb{R}^n,A\in GL_n(\mathbb{R})$，则有

(1) 函数的平移对应振动的乘积：$\widehat{\tau_vf}(\xi)=e^{-2\pi i\xi\cdot v}\widehat{f}(\xi)$；

(2) 换元公式：$\widehat{f\circ A}(\xi)=\det(A)^{-1}\widehat{f}(A^{-T}\xi)$，特别地$\widehat{f(\lambda\cdot)}(\xi)=\lambda^{-n}\widehat{f}(\lambda^{-1}\xi)$

直接用换元公式即得证.

下面是一个非常重要的例子，可以认为得到了Fourier变换的一个不动点.

命题3.19. Gauss函数$G(x)=e^{-\pi|x|^2}\in L^1$，有

$$\mathcal{F}(G)(\xi)=e^{-\pi|\xi|^2}=G(\xi)$$

证要. 实方法：由Fubini定理，$\mathcal{F}(G) = \prod_{1\leq k\leq n}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi_k x_k} e^{-\pi x_k^2}\,dx$，所以只需计算1维情形. 令$F(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\xi x - \pi x^2}\,dx$，求导即可得$F$满足ODE的初值问题

$$F'(\xi) + \xi F(\xi) = 0, \quad F(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} = 1$$

解出唯一解即可. □
复方法：在$\mathbb{C}$上

$$F(\xi) = e^{-\pi\xi^2}\int_{Im(z)=\xi} e^{-\pi z^2}$$

构造上半平面的矩形围道，用Cauchy积分定理. □
借助以上结论可以求出$\mathcal{F}^{-1}$：

定理3.20.(Fourier反演公式) 设$f \in L^1(\mathbb{R}^n_x)$满足$\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n_\xi)$，则

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f}) := \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\cdot\xi}\,d\xi$$

证要. 证明本身也很有意思，分成以下几步：

(1) 首先有一个重要公式：

$$\mathcal{F}^2 =^{\vee}$$

其中$f^{\vee}(x) := f(-x)$.

(2) 再利用分部公式和(1)证明重要公式：

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) e^{2\pi i\xi\cdot x}$$

(3) 对于$G_\lambda = G(\lambda\cdot)$，注意到$\widehat{G_\lambda}$是恒等逼近.

(4) 利用定理3.5的子列技巧. □

最后多几句：如果与定理3.12证明的(1)相比较，考虑常系数线性PDE(下面采用多重指标记号): 设$f \in L^1$，

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha \partial_\alpha\Big) u = f \tag{*}$$

假设$u \in C^\infty \cap L^1$，Fourier变换就有

$$\Big(\sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha (2\pi i\xi)^\alpha\Big)\widehat{u} = \widehat{f}$$

有两个求解思路：

(1) $P \in L^1$，

$$\widehat{P}(\xi) = \frac{1}{\sum_{|\alpha|\leq N} a_\alpha (2\pi i\xi)^\alpha}$$

Fourier反演解得P，令$u = P * f$. 又或者

(2) $\delta \in L^1$，$\forall f \in L^1, \delta * f = f$(卷积的单位元，由此可以导出$\widehat{\delta} = \mathbf{1}$)，且存在

$$E : (\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha \partial_\alpha) E = \delta$$

令$u = E * f$(E称为方程(*)的基本解). 不过$\widehat{E} = \widehat{P}$，殊途同归.

然而不幸的是两种方法都出现问题：(1)是由于$\widehat{P} \notin L^1$，Fourier反演以及卷积可能无意义；(2)是由于

练习7. 证明L^1_{loc}中不存在卷积的单位元δ.
提示. 选择适当的试验函数.

为了解决(1)就要对奇点处的积分做出远为精细的估计，这条路线发展出了调和分析中的奇异积分理论(及相应的函数分解技术)，也许有机会在课程的最后加以介绍；而为了解决(2)就要扩充函数的定义，这条路线将引出课程后半段重点讲解的(缓增)分布理论，在此预告.
注. 有兴趣的同学可以思考定理3.20证明中分部公式和恒等逼近的作用，大抵可以看出一点(2)路线的端倪(?)

$L^2(\mathbb{T})$和$L^2(\mathbb{R}^n)$上的Fourier变换

这一节将整理Fourier对“频率正交性”的观察，即向函数空间引入内积运算.

定义3.21. 赋予一个复双线性型$\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$满足

(1) 双线性；

(2) 共轭对称：$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$；

(3) 正定：$\langle x, x\rangle \geq 0$，等号当且仅当$x = 0$时成立

的线性空间称为**内积空间**

命题3.22. 设$(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$是内积空间，则
(1) 内积诱导了X的范数$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$；
(2) Cauchy-Schwartz不等式：$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$；
(3) 勾股定理：若$\langle x, y\rangle = 0$，则$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.
(4) 极化恒等式：$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\,\|x + iy\|^2 - i\,\|x - iy\|^2)$.

完备内积空间称为**Hilbert空间**. 内积为空间引入了几何结构和更便利的收敛(拓扑).

命题3.23. 设Hilbert空间$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. 如果$\{x_n\} \subset H$两两正交，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$收敛当且仅当级数$\sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^2$收敛.
证要. 利用正交性展开$\|S_m - S_n\|$. □

由此引入Hilbert空间的Hilbert基：

定义3.24. 设Hilbert空间$(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. 如果$\{e_i\}\subset H$所张成的线性子空间在$H$中稠密，且$\langle e_i,e_j\rangle=\delta_{ij}$(Kronecker符号)，则称$\{e_i\}$是$H$的**Hilbert基**.

定义3.25. 拓扑空间V是**可分**的，当且仅当V有稠密的可数子集.

定理3.26./练习 可分的Hilbert空间有Hilbert基.

定理3.27. $L^2(\mathbb{R}^n),L^2(\mathbb{T})$是可分Hilbert空间.

证要. 引入内积结构

$$\langle f,g\rangle_{L^2}:=\int_{\mathbb{R}^n}f\cdot\overline{g}$$

完备性上文已经证明. 可分性可以构造有理方体(顶点坐标均$\in\mathbb{Q}^n$)的特征函数$\mathbf{1}_B$来证明. □

下面提供了稠密性的判别法.

引理3.28. 设Hilbert空间$(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，$V\subset H$是线性子空间. 则$V$稠密当且仅当，对任意$x\in H,x\perp V\Rightarrow x=0$.

证要. 设$x\in H,x\perp V$. 由稠密性存在$\{v_k\}\subset V,v_k\to x$，考虑

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\langle x,x-v_k\rangle+\langle x,v_k\rangle\\&\leq\|x-v_k\|\cdot\|x\|\end{aligned}$$

令$k\to\infty$即可. 充分性请参考补充材料中关于投影算子的内容. □

命题3.29. 函数列$\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$是$L^2(\mathbb{T})$的一组Hilbert基.

由此直接得到$\mathbb{T}$上经典Fourier分析最重要的结果：

定理3.30.(Parseval恒等式) 设$f\in L^2(\mathbb{T})$，则

$$\|f\|_2^2=\sum_{-\infty}^{+\infty}\left|\widehat{f}(k)\right|^2$$

又设$f,g\in L^2(\mathbb{T})$，则(由极化恒等式)

$$\langle f,g\rangle_{L^2}=\sum_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}$$

证要. 这个定理完全可以放在抽象的可分Hilbert空间H上证明. 设$\{e_k\}$是Hilbert基，得到坐标$c_k=\langle f,e_k\rangle$. 考虑部分和$f_N=\sum_{k=1}^N c_ke_k$，证明(**Bessel不等式**)

$$\|f_N\|\leq\|f\|$$

由命题3.23，$f_N\to f'=\sum_{k\geq1}c_ke_k$，则

$$\langle f',e_k\rangle=\langle f,e_k\rangle,\forall k\in\mathbb{N}$$

由引理3.28可得$f = f'$. □

第一个应用关于$\mathbb{T}$上的Poisson核和圆盘Dirichlet问题的解.

练习7. 设$f \in L^2(\mathbb{T})$

(1) 回顾第一章对Dirichlet问题的探究，将解u表达为$P_r * f, r \in [0,1)$，并给出**Poisson核**P_r的显式表示.

(2) 证明P_r是恒等逼近$(r \to 1)$，并给出解u的光滑性和边界收敛性.

(3) 证明$P_r(\theta), P_r * f(\theta)$在$\mathbb{D}$上调和.

(4)(Fatou定理) 设$\mathbb{D}$上的有界全纯函数f，则对几乎每个$\theta \in [0, 2\pi)$，f都存在径向极限.
(可以将条件弱化为**Hardy空间**：$f \in H^2(\mathbb{D})$：)

再介绍一个著名结论，Paseval恒等式和二进分解共同发挥了作用.

练习8.(Berstein定理 from Stein习题) 设$f \in C^\alpha(\mathbb{T})$. 如果$\alpha > \frac{1}{2}$，则$f$的Fourier级数一致收敛于$f$. 请完成定理的证明：

(1) 设$g_h(x) = f(x+h) - f(x-h)$，计算$\widehat{g_h}(k)$.

(2) 证明存在与h无关的常数C，

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\sin(kh)|^2 \left|\widehat{f}(k)\right|^2 \le Ch^{2\alpha}$$

(3) 证明$\sum \widehat{f}(k)$绝对收敛，进而完成定理的证明.
提示. 对频率系数h作二进分解.

第三个应用来源于古典Fourier分析一个令人惊异的结论：

练习9. 我们建立L^1的**逐项积分定理**

(1) 设$f \in L^2(\mathbb{T})$(自然$f \in L^1$)，且

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_n e^{ikx}$$

则对$\forall a, b \in [-\pi, \pi]$，

$$\int_a^b f(t)\, dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_a^b c_n e^{ikx}$$

提示. 用$\chi_{[a,b]}$与f作L^2作内积，用Parseval恒等式.

(2) 将条件推广为$f \in L^1(\mathbb{T})$，证明相同的结论.
提示. 证明函数$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$是有界变差函数，用Dirichlet-Jordan判别法.
注. 注意定理的条件：f的Fourier级数完全不需要收敛性!

(3)(Fejér) 证明$L^1(\mathbb{T})$的Fourier级数一定满足

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < \infty$$

提示. 计算$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$的Fourier系数. 考虑Fejer核F_N，注意F连续，对$F_N * F$用Fejér定理并Fourier展开. 计算$F_N * F(0)$.

下面建立$L^2(\mathbb{R}^n)$上的Fourier变换. 我们形式地定义L^2上的**Fourier变换**:

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

注意上面的积分不一定有意义(例如$\mathbb{R}$上$f(x) = \frac{1}{1+|x|}$). 所以利用L^1的Fourier变换和稠密性原理：已知$C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$在L^2中稠密，而Fourier变换在C_c^∞上成立

$$\mathcal{F} : C_c^\infty \to L^1$$

另外，对$f \in C_c^\infty$有

$$\overline{\widehat{f}(\xi)} = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{f(x)}e^{2\pi i\xi\cdot x}\,dx = \mathcal{F}^{-1}(\overline{f})(\xi)$$

故有

$$\begin{aligned}
\left\|\widehat{f}\right\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\cdot\overline{\widehat{f}(\xi)}\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}(f)(\xi)\cdot\mathcal{F}^{-1}(\overline{f})(\xi)\,d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f\cdot\mathcal{F}\circ\mathcal{F}^{-1}(\overline{f})\,dx \\
&= \|f\|_2
\end{aligned}$$

由L^2完备性完成了延拓：

定理3.31.(Plancherel定理) $\mathcal{F} : L^1\cap L^2 \to L^2$是等距同构：

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2 = \|f\|_2$$

又设$f, g \in L^2$，则(由极化恒等式)

$$\langle f, g\rangle_{L^2} = \left\langle \widehat{f}, \widehat{g}\right\rangle_{L^2}$$

练习10. 设$f \in L^2$，证明$\mathcal{F}^2(f) = f^\vee$.

练习11. 证明：在L^1, L^2定义的两个$\mathcal{F}$在$L^1\cap L^2$上是同一个算子.

至此我们只对$p=1,2$的情形下定义了Fourier变换. 很不幸的是，我们没办法在函数层面对所有$p>1$定义Fourier变换(譬如可以考虑函数$\chi_{\mathbb{R}}\in L^\infty$作Fourier变换...)，这也进一步说明我们对于函数的理解应当得到推广，将来再谈.

下面的练习是关于$L^2(\mathbb{R}^2)$的Fourier变换的应用.

练习12.(Nash不等式，2019年丘赛个人赛笔试题) 设C^1函数$f:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$满足$f\in L^1\cap L^2$，$|\nabla f|\in L^2$，则存在与$f$无关的常数$K$：

$$\|f\|_2^2\le K\|f\|_1\|\nabla f\|_2$$

并给出尽可能小的K.

练习13.(Heisenberg不确定性原理) 参考Stein的Fourier Analysis相关章节的内容.

补充：投影算子，Riesz表示定理，变分原理

下面补充一点Hilbert空间极重要的理论(也许课程后面有机会用到).

定理3.32.(投影与变分) 设Hilbert空间$(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$，$\Omega\subseteq H$是闭凸集. 则存在唯一的有界映射

$$\pi: H\to\Omega$$

满足

$$\|x-\pi(x)\|=\inf_{y\in\Omega}\|x-y\|$$

称$\pi(x)$是x在Ω上的**投影**；特别地有(投影不等式)

$$\langle x-\pi(x), y-\pi(x)\rangle\le 0,\quad \forall y\in\Omega$$

证要. 给出$\inf_{y\in\Omega}\|x-y\|$的极小化序列$\{y_k\}$，利用平行四边形等式验证y_k是Cauchy列，$\pi(x)$存在；考虑(变分法)

$$f(t)=\|x-ty-(1-t)\pi(x)\|$$

的极值点导出投影不等式. 用投影不等式考虑$\|y_1-y_2\|$可得$\pi(x)$良定义. □

定理3.33.(正交投影) 在定理3.32条件下，若Ω是线性闭子空间，则π是连续线性映射，且有**正交投影/分解**

$$x-\pi(x)\perp\Omega$$

证要. 将$y-\pi(x), \pi(x)-y$分别代入投影不等式. □

下面给出了H的对偶空间

$$H^* := \{f : H \to \mathbb{C} \mid \exists C > 0, |f(x)| \le C \|x\|, \quad \forall x \in H\}$$

定理3.34.(**Riesz表示定理**) 设Hilbert空间$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. 对$f \in H^*$，存在$u_f \in H$，使得

$$f = f_u : x \mapsto \langle u, x\rangle$$

这诱导了H与H^*的等距同构(对偶).

证要. 考虑闭(?)子空间$\ker(f)$，任取$x \in H$得到$v = x - \pi(x)$. 调节v范数使得$|f(v)| = \|v\|^2$.
□

注. 借助表示定理，我们今后把线性泛函$f(x)$一律记为$\langle f, x\rangle$以凸显这种对偶性(无论H是否为Hilbert空间)

下面介绍一点变分原理的知识.

定义3.35. 一个双线性型$a : H \times H \to \mathbb{R}$是
(1) **连续**的，当且仅当存在常数$C > 0$，

$$|a(u, v)| \le C |u| |v|, \quad \forall u, v \in H$$

(2) **强制**的，当且仅当存在常数$c > 0$，

$$a(v, v) \ge c |v|^2, \quad \forall v \in H$$

(3) **对称**的，当且仅当

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in H$$

定理3.36.(**Stampacchia, 变分不等式**) 设Hilbert空间$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$上有强制连续的双线性型$a(\cdot,\cdot)$. 设$\Omega \subseteq H$是闭凸集，则对$\forall f \in H^*$，存在唯一的$u \in \Omega$满足

$$a(u, v - u) \ge \langle f, v - u\rangle, \quad \forall v \in \Omega$$

特别地，如果a对称，则u有等价刻画

$$u \in \Omega, \quad \frac{1}{2}a(u, u) - \langle f, u\rangle = \min_{v \in \Omega}\{\frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v\rangle\}$$

定理3.37.(**Lax-Milgram定理**) 设定理3.37中$\Omega = H$. 则对$\forall f \in H^*$，存在唯一的$u \in \Omega$满足

$$a(u, v - u) = \langle f, v - u\rangle, \quad \forall v \in H$$

特别地，如果a对称，则u有等价刻画

$$u \in H, \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u\rangle = \min_{v\in H}\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v\rangle\}$$

注. u的最小值刻画实际上对应了物理的“最小作用量”原理，所以L-M定理在线性椭圆PDE理论(刻画稳定系统)中有重要应用. 比如下面我们对$\mathbb{R}^n$开集上的Dirichlet问题探究一番：...

Poisson求和公式，周期化

下面的定理实现了$f \in C(\mathbb{R})$的周期化，因此将$\mathbb{T}$上Fourier级数的研究转移到$\mathbb{R}$上更丰富的理论是可行的.

定理3.38.(Poisson求和公式) 设$f \in C(\mathbb{R})$. 如果$|f(x)| \le C(1+|x|)^{-n-\epsilon}$, $\left|\widehat{f}(\xi)\right| \le C(1+|\xi|)^{-n-\epsilon}$，则

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

证要. 左右两式的一致收敛性显然. 由f的衰减可知$f \in L^1$，于是可作Fourier变换并应用控制收敛定理. □

练习14. 令$f(x) = x^{-2}$，证明：当$x \notin \mathbb{Z}$时，

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi x)^2}$$

并据此证明(Euler)自然数倒数平方和为$\frac{\pi^2}{6}$.

回忆例1.11中的热核$H_t(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i n x}$(这里系数$2\pi$是为了配合Poisson求和公式做的仿射，相当于定义$\widehat{f}(k) = \int_0^1 f(x) e^{2\pi i k x}\, dx$，并无本质的区别). 现在构造$\mathbb{R}$上的**热核**

$$\mathcal{H}_t(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

同样对于Poisson核$P_r(\theta)$, 也可以定义对应$\mathbb{R}$的Poisson核

$$\mathcal{P}_y(x) := \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$$

练习15. P_r, H_t分别是$\mathcal{P}_y, \mathcal{H}_t$的周期化.

不难注意到$\mathcal{P}_y, \mathcal{H}_t$是恒等逼近(磨光子)，这启发一个问题：能否从$\mathcal{H}_t$得出$H(t)$是恒等逼近？下一章将引入新的工具加以讨论.

4 Fourier级数的收敛性(II)：$a.e.$收敛与极大算子

定理3.10'已能解决一大类Fourier级数收敛性问题，但本章我们将从一个完全不同的角度看待点态收敛性，真正目的还是以此载体引入一些现代分析的有力工具.

注. 本章为了叙述的方便，我们会这样给出测度空间：(X,μ)，X是赋予了一个σ代数的底空间，μ是相应的测度.

卷积/乘子，周期化与可敛性：从$\mathbb{T}$到$\mathbb{R}$

我们先推广一下之前的Poisson求和公式的条件.

定义4.1.(为了少写点字笔者瞎起的名) 称$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$是**可敛**的，如果存在正的，径向分布且径向单调递减的可积函数Φ，

$$|f(x)| \leq \Phi(x) \quad a.e.$$

定理4.2. 设$f \in C(\mathbb{R})$. 设$f, \widehat{f}$均可敛，则

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx}$$

此前关于Fourier级数一系列求和法都可归结于卷积核，而直觉上Poisson公式能帮助我们从$\mathbb{T}$转移到分析工具更丰富的$\mathbb{R}$. 我们不妨以Fejér核为例. 定义$\mathbb{R}$上的**Dirichlet核**

$$\mathcal{D}_R(x) := \int_{-R}^{R} e^{2\pi ix\xi}\, d\xi = \frac{\sin(2\pi Rx)}{\pi x}$$

这是因为$\widehat{\mathcal{D}_R}(\xi) = \chi_{[-R,R]}(\xi)$(Fourier乘子)，这样就能定义$f \in L^p(1 < p < \infty)$的Fourier部分和

$$S_R f(x) := f * \mathcal{D}_R(x)$$

(与$\mathbb{T}$上的Dirichlet核D_N对比). 同理可以定义$\mathbb{R}$上的**Fejér核**

$$\mathcal{F}_R(x) := \frac{1}{R}\int_0^R D_t f(x)\, dt = \frac{\sin^2(\pi Rx)}{R(\pi x)^2}$$

于是有$f \in L^p(1 \leq p < \infty)$的Fourier-Cesaro和

$$\sigma_R f(x) = \frac{1}{R}\int_0^R S_t f(x) dt = f * \mathcal{F}_R(x)$$

立即能发现F_R是一族恒等逼近，所以根据定理3.10'，$\lim_{R\to\infty} f * \mathcal{F}_R(x) = f(x) \quad a.e.$ 值得注意的是

练习1. 证明D_N, F_N分别是$\mathcal{D}_N, \mathcal{F}_N$的周期化.

现在考虑$f \in L^p(\mathbb{T})$(这里$\mathbb{T}$的对应区间是$[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$)，那么由控制收敛

$$\begin{aligned}
f * F_N(x) &= f * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tau_k \mathcal{F}_N(x) \\
&= f * \mathcal{F}_N(x) + \sum_{k \neq 0} f * \tau_k \mathcal{F}_N(x) \\
&= (f \cdot \chi_{[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]}) * \mathcal{F}_N(x) + \sum_{k \neq 0} f * \tau_k \mathcal{F}_N(x)
\end{aligned}$$

第一项根据$\mathbb{R}$上的结果是$\to f(x) \quad a.e.$；
对于第二项，利用$\mathcal{F}_N$是磨光子且$\mathcal{F}_1$可敛(被$\Phi(x) = \frac{1}{(\pi x)^2}$控制)，有估计(这里将$f$周期平移至$\mathbb{R}$上)

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k \neq 0} f * \tau_k \mathcal{F}_N(x) \right| &\leq \sum_{k \neq 0} \left| \int_{-\frac{1}{2}+k}^{\frac{1}{2}+k} f(x-y) \mathcal{F}_N(y)\, dy \right| \\
&\leq \sum_{k \neq 0} \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \Phi_N(-\frac{1}{2}+k) \\
&\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot N \sum_{k \neq 0} \Phi(N(-\frac{1}{2}+k))
\end{aligned}$$

根据Φ恒正且单调递减，

$$\sum_{k \neq 0} \Phi(N(-\frac{1}{2}+k)) \sim \frac{1}{N} \int_{|x| > \frac{N}{2}} \Phi(x)\, dx$$

这里$k \neq 0$是必要的. 再由$\Phi \in L^1$，积分项$\to 0$. 所以当$N \to \infty$时第二项$\to 0$. 我们立刻得到

$$\lim_{N \to \infty} f * F_N(x) = f(x) \quad a.e. \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T}), 1 \leq p < \infty$$

(与讲义第三章所得结果加以对比)

以上论证不依赖于$\mathcal{F}_N$的具体形式，我们实际上证明了

定理4.3. 设$1 \leq p < \infty$. 设$\{\mathcal{K}_t\}_{t>0}$是$\mathbb{R}$上一族卷积核，其中$\mathcal{K}_1 \in L^1(\mathbb{R})$可敛，$K_t$是$\mathcal{K}_t$的周期化. 如果

$$\lim_{t \to 0} f * \mathcal{K}_t(x) = f(x) \quad a.e., \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R})$$

则

$$\lim_{t \to 0} f * K_t(x) = f(x) \quad a.e., \quad \forall f \in L^p(\mathbb{T})$$

(与讲义第二章关于恒等逼近的结论对比)所以这一章后面我们将致力于解决关于$\mathbb{R}$上可敛卷积核的几乎处处收敛性，为此我们需要引入新的工具.

分布函数，弱型估计，$a.e.$收敛与算子族极大算子

在上一章L^p空间一节课里我们提到过p值对f的L^p范数的影响，这一节将引入一些定量

工具把这些想法定量化(尽管还比较粗糙)

定义4.4. 设$f \in \mathcal{M}(X,\mu)$，则定义f(关于测度μ)的**分布函数**$a_f:(0,\infty)\to[0,\infty]$，

$$a_f(\lambda)=\mu(\{x\in X \mid |f(x)|>\lambda\})$$

定义的动机还是很明显的(基于我们之前的讨论)：

定理4.5.(**Chebyshev不等式**) 设$f\in L^p(X)$，则有估计

$$a_f(\lambda)\le(\frac{\|f\|_p}{\lambda})^p$$

注. 这个估计在概率论中也叫**Markov不等式**.

下面的定理给出了分布函数与L^p范数的联系：

定理4.6. 设$\phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$可微，单调增且$\phi(0)=0$，则

$$\int_X \phi(|f(x)|)\,d\mu=\int_0^\infty \phi'(\lambda)a_f(\lambda)\,d\lambda$$

推论4.7. 设$f\in L^p(X),\quad 1\le p<\infty$，则

$$\|f\|_p^p=p\int_0^\infty \lambda^{p-1}\alpha_f(\lambda)\,d\lambda$$

利用分布函数的单调性，我们得以对L^p范数加以二进分解：

练习2.(重要) 证明

$$\|f\|_p^p\sim\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_f(2^n)2^{np}$$

注. 后面就能看到，二进分解使得估计更加方便，因为可以把相对抽象的$\|\cdot\|_p$转化为$a_f(2^n)$的估计，这样就能利用关于正实数的众多不等式.

回到卷积核收敛性问题. 根据点态收敛的刻画

$$\{x\in X:\limsup_{n\to+\infty}|S_nf(x)-f(x)|=0\}$$

进而考虑

$$\mu\{x\in X:\limsup_{n\to+\infty}|S_nf(x)-f(x)|>\lambda\},\quad \forall\lambda>0$$

从中便能看出弱型估计的端倪. 我们将卷积核$K_t\in L^1$抽象化为一族线性算子$\{T_t\}_{t>0}$，定义T_t的**极大算子**

$$T^*:L^p(\mathcal{R}^n)\to\mathcal{M}(\mathbb{R}),T^*f(x)=\sup_{t>0}|T_tf(x)|$$

下面的定理是本章的核心工具之一.

定理4.8. 设$\{T_t\}_{t>0}$是一族$L^p(\mathbb{R})$上的线性算子(不必有界). 如果存在$q\geq 1$，T^*是弱(p,q)型算子，则集合

$$\Gamma_T=\{f\in L^p(\mathbb{R}):\lim_{t\to 0}T_tf(x)=f(x)\quad a.e.\}$$

是$L^p(\mathbb{R})$中的闭集.

证要. 设$\{f_n\}\subset\Gamma_T$依L^p收敛于f，则

$$\begin{aligned}
&\mu\{x\in X:\limsup_{n\to+\infty}|T_tf(x)-f(x)|>\lambda\}\\
\leq&\mu\{x\in X:\limsup_{n\to+\infty}|T_t(f-f_n)(x)+(T_tf_n(x)-f_n(x))+(f_n(x)-f(x))|>\lambda\}\\
\leq&\mu\{x\in X:T^*(f-f_n)(x)>\frac{\lambda}{2}\}\\
&+0\\
&+\mu\{x\in X:|(f_n(x)-f(x))|>\frac{\lambda}{2}\}\\
\leq&(\frac{2C}{\lambda}\left\|f_n-f\right\|_p)^q+(\frac{2}{\lambda}\left\|f_n-f\right\|_p)^p
\end{aligned}$$

所以

$$\{x\in X:\limsup_{n\to+\infty}|S_nf(x)-f(x)|>0\}$$

可表示为可数个零测集之并(取$\lambda=\frac{1}{k}$). □

我们能对L^p稠密集$C_c^\infty(\mathbb{R})$证明可敛卷积核的收敛性(证略)，所以基于上述定理，本章往后会重点研究算子的弱型估计(称为弱型是因为定理4.2).

定义4.9. 设测度空间(X,μ)，$1\leq p<\infty$. 定义**弱L^p空间**(典型例子是$|x|^{-\frac{n}{p}}$)：

$$L^{p,\infty}(X):=\{f\in\mathcal{M}(X)\mid\sup_{\lambda>0}\lambda^pa_f(\lambda)<\infty\}$$

注. $\|f\|_{p,\infty}=\sup_{\lambda>0}\lambda\cdot a_f(\lambda)^{\frac{1}{p}}$并不是范数(三角不等式不成立).

弱/强(p,q)型，$L^p,L^{p,\infty}$的插值，实/复插值定理

定义4.10. 设测度空间(X,μ)和(Y,ν)，算子$T:L^p(X)\to\mathcal{M}(Y)$是**弱(p,q)**算子($q<\infty$)，当且仅当存在常数$C$满足弱型估计

$$a_{T(f)}(\lambda)\leq C(\frac{\|f\|_p}{\lambda})^q$$

当$q=\infty$时**弱(p,∞)**算子即$T:L^p\to L^\infty$有界；**强(p,q)**算子即$T:L^p\to L^q$有界.

定义4.11. 算子$T:\mathcal{M}(X)\to\mathcal{M}(Y)$是**次线性**的，当且仅当

(1) $|T(f+g)|\leq|T(f)|+|T(g)|,\quad\forall f,g\in\mathcal{M}(X)$；

(2) $|T(\lambda f)|=|\lambda|\,|T(f)|,\quad\forall\lambda\in\mathbb{C}$.

现在介绍非常非常重要的算子插值定理(实版本)，可以说这是我们对指标p一系列讨论的

一次大总结.

引理4.12. $L^{p_0}\cap L^{p_1}\subset L^p\subset L^{p_0}+L^{p_1},\quad \forall 1\leq p_0\leq p\leq p_1$.
证要. 对于左式，法一可以对指标直接用Hölder不等式；法二可以使用对数凸性技巧(Hölder不等式证明的中间步骤):

$$|f(x)|_t^p\leq(1-t)\,|f(x)|^{p_0}+t\,|f(x)|^{p_1}$$

其中$p_t=(1-t)p_1+tp_2$；法三则响应了我们上一章讲过指标p与f值分布的朴素关系：

$$\begin{aligned}\left|f\cdot\chi_{f(x)\leq 1}\right|^{p_1}\leq\left|f\cdot\chi_{f(x)\leq 1}\right|_t^p\leq|f|^{p_0}\\ \left|f\cdot\chi_{f(x)>1}\right|^{p_0}\leq\left|f\cdot\chi_{f(x)>1}\right|_t^p\leq|f|^{p_1}\end{aligned}$$

我们顺便证明了右式. □

练习3. 设函数f满足弱L^p估计：

$$\|f\|_{p_0,\infty}\leq B_0,\|f\|_{p_1,\infty}\leq B_1$$

其中$1\leq p_0<p_1$. 则对$p_t=(1-t)p_0+tp_1$有

$$\|f\|_{p_t,\infty}\leq B_t:=B_0^{1-t}B_1^t$$

令人惊喜的是基于端点的弱L^p估计可以加强为内点的强L^p估计：

引理4.12'. 在练习3的记号下，估计可以加强为

$$\|f\|_{p_t}\leq C_{p_0,p_1,t}B_t,\quad\forall 0<t<1$$

进而有

$$\begin{aligned}&L^{p_0}\cap L^{p_1}\subset L^{p_0,\infty}\cap L^{p_1,\infty}\\ \subset&L^{p_t}\subset L^{p_t,\infty}\\ \subset&L^{p_0}+L^{p_1}\subset L^{p_0,\infty}+L^{p_1,\infty}\end{aligned}$$

为了证明更加自然，我们先在更熟悉的正实数上做一些准备. 设正实数A_0,A_0,B_0,B_1. 设

$$A_0\leq B_0,\quad A_1\leq B_1$$

那么根据对数凸性有

$$A_t<B_t,\forall 0<t<1$$

但是估计可以得到进一步加强：

引理. 按以上记号，对$\epsilon \le \min\{t, 1-t\}$，则

$$A_t \le B_t \cdot \min\{\frac{A_1 B_0}{A_0 B_1}, \frac{A_0 B_1}{A_1 B_0}\}^\epsilon$$

证要. 将原估计的t调整为$t+\epsilon$和$t-\epsilon$(重要技巧). □

引理*4.12'*证要. 回顾练习3的证明中

$$a_f(\lambda) \le \frac{B_0^{p_0}}{\lambda^{p_0}}, \quad a_f(\lambda) \le \frac{B_1^{p_1}}{\lambda^{p_1}}$$

我们给予更精细的估计：取λ_0使得$B_0^{p_0}/\lambda_0^{p_0} = B_1^{p_1}/\lambda_0^{p_1}$，则根据上述引理，取$A_0 = A_1 = a_f(\lambda), B_i = B_i^{p_i}/\lambda_0^{p_i}$计算可得

$$a_f(\lambda) \le \frac{B_t^{p_t}}{\lambda^{p_t}} \cdot \min\{\frac{\lambda}{\lambda_0}, \frac{\lambda_0}{\lambda}\}^\epsilon$$

其中正常数ϵ仅与p_0, p_1, t有关. 代入推论4.7即可. □

引理4.12'的成功振奋人心. 秉持上述命题的思想(分离与控制，divide-and-conquer)，下面证明：

定理4.13.(Marcinkiewicz, **实插值定理**) 设测度空间(X,μ)和(Y,ν)，$1 \le p_0 < p_1 \le \infty$. 设有次线性算子$T: L^{p_0}(X) + L^{p_1}(X) \to \mathcal{M}(Y)$是弱$(p_0$,$p_0)$和弱$(p_1$,$p_1)$的，则对$\forall p_0 < p < p_1$，$T$是强(p,p)算子.

注. 定理中指标情形还可以分别加强为$(p_0$,$q_0)$,$(p_1$,$q_1)$和(p_t, q_t):

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

其中$p_i \le q_i$. 我们来证明这个加强版本.

证明. 由稠密性技巧，不妨设f是有限支撑的简单函数. 根据弱型估计

$$a_{Tf}(\lambda) \le (B_i \frac{\|f\|_{p_i}}{t})^{q_i}, \quad i = 0, 1$$

根据推论4.7与练习2，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_f(2^k) 2^{p_t k} \sim \|f\|_{p_t}^{p_t} \tag{1}$$

且我们只需证明

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_{Tf}(2^k) 2^{q_t k} \le C_{p_0,q_0,p_1,q_1,t} \|f\|_{p_t}^{q_t} \tag{2}$$

注意到(2)两边关于f齐次(请验证)，故将f正规化：$\|f\|_{p_t} = 1$. 不妨设$p_0 < p_1$(若$p_0 = p_1$那么引理4.12'已经证明了). 下面对f的值分布截断以进行二进分解：

$$f = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m, \quad f_m := f \cdot \chi_{2^m \le |f| < 2^{m+1}}$$

应当指出m可取有限个，因为f有限支撑. 根据T的次线性，对于任意正实数列$\{c_{k,m}\}_{m\in\mathbb{Z}}$满

足$\sum_m c_{k,m}=1,\forall k\in\mathbb{Z}$, 有

$$a_{Tf}(2^k)\le\sum_m a_{Tf_m}(c_{k,m}2^k)$$

之后我们会根据所需构造参数$c_{k,m}$的最优选择(因为恒成立). 根据弱型估计有

$$a_{Tf_m}(c_{k,m}2^k)\le(B_i\frac{\|f_m\|_{p_i}}{c_{k,m}2^k})^{q_i},\quad i=0,1$$

根据f_m的截断构造，

$$\|f_m\|_{p_i}\le 2\cdot 2^m a_f(2^m)^{\frac{1}{p_i}},\quad i=0,1$$

为了利用(1)，简记$b_m:=a_f(2^m)2^{p_t m}$，则$\sum_m b_m\le\|f\|_{p_t}^{p_t}=1$. 欲得到(2)仅需证明

$$\sum_k 2^{kq_t}\sum_m\min_{i=0,1}(2B_i\cdot c_{k,m}^{-1}2^{m-k-m\frac{p_t}{p_i}})^{q_i}b_m^{\frac{q_i}{p_i}}\le C\|f\|_{p_t}^{q_t}=C$$

由$q_i\ge p_i$与$b_m\le 1$，

$$b_m^{\frac{q_i}{p_i}}\le b_m,\quad\forall m\in\mathbb{Z}$$

代入整理后可知仅需证明

$$\sum_k\min_{i=0,1}(c_{k,m}^{-1}2^{m(1-\frac{p_t}{p_i})-k(1-\frac{q_t}{q_i})})^{q_i}\le C,\quad\forall m\in\mathbb{Z}\tag{3}$$

而点$(\frac{1}{p_t},\frac{1}{q_t})(0\le t\le 1)$共线，故存在常数$\alpha$:

$$\frac{1}{p_i}=\frac{1}{p_t}+x_i,\frac{1}{q_i}=\frac{1}{q_t}+\alpha x_i$$

代入，(3)左式即为

$$\sum_k\min_{i=0,1}(c_{k,m}^{-1}2^{(k\alpha q_t-mp_t)x_i})^{q_i}$$

现在需要调节$c_{k,m}$保证以下要求：

(1) 对$\forall k\in\mathbb{Z}$

$$\sum_m c_{k,m}=1,$$

(2) 对$\forall m$，

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\min_{i=0,1}(c_{k,m}^{-1}2^{(k\alpha q_t-mp_t)x_i})^{q_i}$$

一致有界.

注意到$q_0x_0>0,q_1x_1<0$，可以适当选择保证各项的指数衰减. 于是取

$$c_{k,m}=K_k\cdot 2^{-|k\alpha q_t-mp_t|\cdot\frac{\min\{|x_0|,|x_1|\}}{2}}$$

其中K_k是保证$\sum_m c_{k,m}=1,\forall k\in\mathbb{Z}$的因子. 由等比数列求和可知上式有限，故$K$存在. 这样我们完成了定理的证明. □

练习4. 上面的证明是针对q_0, q_1均有限的情形. 请模仿上述证明说明$q_i = \infty$的情形.

据此，我们只需研究端点指标的弱型估计. 历史上，分析学家们正是为了定义练习4中L^p的Fourier变换而发展了插值理论(interpolation). 当然对于高p值我们还是无能为力. 事实上最早的插值结论是复插值定理(因证明使用了复分析手段而得名)

定理.(复插值定理，Riesz) 设线性算子$T:\ L^{p_0} + L^{p_1} \to L^{q_0} + L^{q_1}$，且有强端点估计

$$\|Tf\|_{q_0} \le C_0 \|f\|_{p_0}, \quad \|Tf\|_{q_1} \le C_1 \|f\|_{p_1}$$

则有强(p_t, q_t)型的插值估计

$$\|Tf\|_{q_t} \le C_t \|f\|_{p_t}$$

证明相当优雅但篇幅所限无法在此处展示，读者可以参考Folland的*Real Analysis*或者T. Tao的*An Epsilon of Room* I 相关章节.

注意到复插值定理得到的常数系数估计远好于实插值定理(实方法得到的系数在端点处趋于无穷)，但对算子的限制也强了很多(不适用于次线性，端点必须是强型估计)，所以各有用处.

练习5. 证明Hausdorff-Young不等式：设$1 \le p \le 2$. 此前已经定义了L^1, L^2上的Fourier变换$\mathcal{F}$，则$\mathcal{F}$可延拓至L^p

$$\mathcal{F} : L^p \to L^q, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

且

$$\left\|\widehat{f}\right\|_q \le \|f\|_p$$

最后是实分析非常重要的估计技术：**Schur test**. 它把一大类积分算子的强型估计转化为核函数在端点情形的积分估计(来到函数上总是更好计算些).

定理/练习6.(Schur Test) 设$p_0 = 1, q_1 = \infty, 1 \le p_1, q_0$. 设可测函数$K \in \mathcal{M}(X \times Y)$，且满足估计

$$\begin{aligned}
\|K(x,\cdot)\|_{q_0} &\le B_0, \quad for\ \ x\ \ a.e. \\
\|K(\cdot,y)\|_{p_1'} &\le B_1, \quad for\ \ y\ \ a.e.
\end{aligned}$$

则线性算子

$$Tf(y) := \int_X K(x,y) f(x)\, d\mu(x)$$

在$f \in L^{p_t}$上良定义$(1 < t < 1)$，且T是强(p_t, q_t)型估计并不困难：

$$\|Tf\|_{q_t} \le B_t \|f\|_{p_t}$$

提示. 运用Minkowski积分不等式(第3章练习2)导出端点的强型估计(常用套路！), 再用复插值定理. 各位也可以尝试给出弱型版本的Schur test.

球卷积核，Hardy-Littlewood极大算子与可敛性

这一节我们引入局部可积函数类的极大函数来估计$K * f$.

定义4.14. 记球体$B_R = B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$. 设$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，定义**Hardy-Littlewood极大算子**M：

$$M : Mf(x) = \sup_{R>0} \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} |f(x-y)|\, dy$$

注意到，定义可敛函数

$$\phi(x) := \frac{1}{|B_1|} \chi_{B_1}$$

则M是**球卷积核**$\{\phi_t\}$的极大算子. 下面的定理说明可以利用空间上的极大算子估计算子族的极大算子.

定理4.15. 设K在$\mathbb{R}$上可敛，则

$$K * f(x) \le \|K\|_1 \cdot Mf(x)$$

证要. 第1步：设K是径向单调递减的非负简单函数，对K单调重排得到分解

$$K(x) = \sum_k a_k \cdot \chi_{B_k}(x)$$

其中B_k是以$x = 0$为球心的球体，$a_k > 0$. 则

$$\begin{aligned}|K * f(x)| \le& \sum_k a_k |B_k| \cdot \frac{1}{|B_k|} \chi_{B_k} * |f|(x) \\ \le& (\sum_k a_k |B_k|) Mf(x) = \|K\|_1 Mf(x)\end{aligned}$$

第2步：设K是径向单调递减的非负可积函数，K可以用一族非负简单函数单调逼近，而所证估计左右两侧均为积分形式，且仿射系数t不改变条件，所以运用单调收敛定理和第1步.
第3步：设K可敛，根据控制函数$|K_t|$估计即可. □

显然M是次线性算子，且是(∞，∞)型. 但为了证明M是弱(1,1)型，我们不妨绕点弯路引入更强大的工具而不是走经典的"覆盖法"路线(如果我没时间讲覆盖法的话这个可以参考Stein实分析第三章前两节).

练习7. 设$f \in L^1$. 如果$Mf \in L^1$，则$f = 0 \quad a.e.$ 所以M不可能是强$(1,1)$型.
证要. 假设f不满足几乎处处为0，则存在$\epsilon, R > 0$，

$$\int_{B_R} |f| \ge \epsilon$$

那么对于$\forall x, |x| > R$，利用$B_R \subset B(x, 2|x|)$估计$Mf(x)$下界. □

Calderón-Zygmund分解，极大算子的弱(1,1)估计

H-L极大算子看似是空间上的操作，实际上还得上升到函数的值分布的层次来研究. 为了尽可能精细地刻画值分布，我们引入$\mathbb{R}^n$的二进分解：

设$\mathbb{Z}^n$是$\mathbb{R}^n$中的格点，定义$\mathcal{Q}_k$为顶点在$(2^k\mathbb{Z})^n$, 边长2^k的全体二进方体构成的集合，$\mathcal{Q} = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\mathcal{Q}_k$就是$\mathbb{R}^n$的**二进分解**.

可以直接得到以下性质：

(1) 对于任意给定的$x \in \mathbb{R}^n$，每个$\mathcal{Q}_k$都存在唯一一个方体包含x.

(2) 任意两个二进方体都只有内部不交或某个包含另一个两种情形.

(3) $\mathcal{Q}_k$中的每个方体都包含了2^n个$\mathcal{Q}_{k-1}$中的方体.

对于$f \in L^1_{\text{loc}}$，方体$Q_r = [-r, r]^n$，我们可定义**Hardy-Littlewood方体极大算子**

$$M' : M'f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{(2r)^n} \int_{Q_r} |f(x-y)| \, dy$$

显然M'与M等价，即存在$C > c > 0$，

$$cMf(x) \leq M'f(x) \leq CMf(x)$$

下面借助二进分解，定义**二进均值算子**：

$$E_k : E_k f(x) = \sum_{Q\in\mathcal{Q}_k} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q f\right) \cdot 1_Q(x)$$

同样地可以定义$\{E_k\}$的**二进极大算子**：

$$M_d : M_d f(x) = \sup_k |E_k f(x)|$$

从空间上看，M_d要比M更加“规则”，我们尝试先证明它是弱$(1,1)$型，这导出了二进均值算子是一个离散版本的恒等逼近.

定理4.16. M_d是弱$(1,1)$算子. 进而对$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，

$$\lim_{k\to-\infty} E_k f(x) = f(x) \quad a.e.$$

定理的证明本质上是要说明

定理4.17.(Calderón-Zygmund分解Ⅰ) 设$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$非负. 对每个$\lambda > 0$, 都存在一列

二进方体$\{Q_i\}$满足

(1) $f(x) \le \lambda \quad a.e., \quad x \notin \cup_i Q_i$；

(2) $|\cup_i Q_i| \le \frac{1}{\lambda} \|f\|_1$；

(3) $\lambda < \frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f < 2^n\lambda$.

定理4.17证明. 覆盖问题可能最重要的思路就是不交化，即用某种方式分划点集使得不同区域的积分可加. 这里对点集

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\}$$

分划为

$$\Omega = \bigcup_k \Omega_k : \Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n : E_k f(x) > \lambda; E_j f(x) \le \lambda, \forall j > k\}$$

(即Ω_k由所有二进均值在第k级首次大于λ的点构成.) 显然

(a) Ω_k之间互不相交.

(b) 对$\forall k \in \mathbb{Z}$，Ω_k都可以表示为$\mathcal{Q}_k$中的方体之并，所以有$\Omega = \cup_i Q_i, Q_i \in \mathcal{Q}$.

因此有弱型估计

$$\begin{aligned}|\Omega| &= \sum_k |\Omega_k| \\ &\le \sum_k \frac{1}{\lambda}\int_{\Omega_k} E_k f \\ &= \frac{1}{\lambda}\int_\Omega f \le \frac{1}{\lambda}\|f\|_1\end{aligned}$$

且根据构造，(3)左式自动满足；对于右式，取$\widetilde{Q_i} = 2Q_i$，则$\widetilde{Q_i}$比Q_i粗一级. 根据构造以及f非负有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{|Q_i|}\int_{Q_i} f \\ \le&\frac{\left|\widetilde{Q_i}\right|}{|Q_i|}\cdot\frac{1}{\left|\widetilde{Q_i}\right|}\int_{\widetilde{Q_i}} f \\ \le&2^n\lambda\end{aligned}$$

如此完成了C-Z分解的构造. □

定理4.16证要. 显然结论对$f \in C(\mathbb{R}^n)$成立；根据C-Z分解，M_d是弱(1,1)型算子(对一般的f分划为正负部分别分解)，由定理4.8，结论对$f \in L^1$成立；对$f \in L^1_{\text{loc}}$，考虑$f \cdot \chi_Q \in L^1, Q \in \mathcal{Q}_0$即可. □

下面的估计是令人振奋的，因为可以用相对正规的M_d去控制空间相对灵活的M'.

定理4.18. 设$f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$非负，则

$$\mu\{x \in \mathbb{R}^n \mid M'f(x) > 4^n\lambda\} \le 2^n \mu\{x \in \mathbb{R}^n \mid M_d f(x) > \lambda\}$$

证明. 证明思路就如用方体的外覆盖和内覆盖去估计一般区域一般，但证明还是得上升到函数分解的水平，这也是定理4.16引入C-Z分解的一个动机. 对$M_d f$按高度λ作C-Z分解：

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_i Q_i$$

则定理相当于证明

$$\{x \in \mathbb{R}^n : M'f(x) > 4^n\lambda\} \subset \bigcup_i 2Q_i$$

考虑$x \notin \bigcup_i 2Q_i$，Q是任意一个以x为中心的方体，设边长$2^{k-1} \le l(Q) < 2^k$. 则Q被粗一级的$\mathcal{Q}_k$中$m \le 2^n$个方体$A_1, A_2, ..., A_m$覆盖(在$n = 2, 3$情形下直观想象作为辅助). 我们断定任意一个A_j都不会被任何一个Q_i所包含，否则$x \in \bigcup_i 2Q_i$. 那么根据C-Z分解的构造，f在A_i上均值小于λ. 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{|Q|}\int_Q f =& \frac{1}{|Q|}\sum_{j=1}^m \int_{Q\cap A_j} f \\ \le& \sum_{j=1}^m \frac{|A_j|}{|Q|} \cdot \frac{1}{|A_j|}\int_{A_j} f \\ \le& m \cdot 2^n\lambda \le 4^n\lambda\end{aligned}$$

这样完成了定理的证明. □

借助上述定理我们得到

定理4.19. M, M'是弱$(1,1)$型和(∞,∞)型，进而是强(p,p)型，$1 < p < \infty$.

定理4.20. 设$\phi(x)$可敛，则对$f \in L^p, 1 \le p < \infty$，

$$\lim_{t\to 0} \phi_t * f(x) = (\int_{\mathbb{R}^n} \phi) \cdot f(x) \quad a.e.$$

再运用定理4.3，我们完成了本章的目标：一大类卷积核算子——除了Dirichlet核，它不可敛——的点态收敛性得到确认(P.S. 这里还得到了Lebesgue微分定理的新证明)，与定理3.10一起也相当完满地回答了例1.11中提出的问题(热核的L^p收敛性和a.e.收敛性). 当然关于Dirichlet核的毫无进展也在暗示证明Fourier部分和点态收敛性极度困难.

我们再针对练习2做一点补充，探讨Mf的可积性，顺便是对前面一些计算寄巧的回顾.

定理4.21. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$有界，则存在常数$C$，

$$\int_B Mf \leq 2\,|\Omega| + C\int_{\mathbb{R}^n} |f| \ln^+ |f|$$

其中$\ln^+ x = \max\{\ln x, 0\}$.
证要.

最后我们给出Calderón-Zygmund分解在权重不等式的另一个应用(定理4.19之推广)，为本章作结.

定理4.22. 设$w \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$非负，则

$$\int_{x:Mf(x)>\lambda} w(x)\,dx \leq \frac{C_1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, Mw(x)\,dx$$

对于$1 < p < \infty$，

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p\, w(x)\,dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\, Mw(x)\,dx$$

证要.
注. 定理4.22进一步发展就是所谓的A_p**权重**理论，感兴趣的朋友可以参考Duoandicoetxea的*Fourier Analysis*第7章.

如果后面有机会，笔者可能会在奇异积分的框架下讲述更多故事(期间将证明Dirichlet核是强(p,p)型，进而得到Fourier级数的L^p收敛性)，那时会获得C-Z分解(Ⅱ)更加深刻的应用.
但接下来我们得先收一收，在下一章继续完善Fourier分析的基础，并发掘它在分析其他领域的应用潜力.

5　从L^1_{loc}到$\mathcal{D}'$：分布理论，缓增分布的Fourier变换

本章将引入分布理论和缓增分布的Fourier变换，统一地刻画各类分析对象，并进一步探讨Fourier分析的诸多有力应用.

试验函数$\mathcal{D}(\Omega)$，分布$\mathcal{D}'(\Omega)$的性质和运算

我们将之前试验函数的思想严格化. 此后若不加说明，$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$是非空开集.

定义5.1. 令**试验函数空间**$\mathcal{D}(\Omega)$是$C_c^\infty(\Omega)$上定义收敛性(拓扑)：$\mathcal{D}(\Omega)$中的序列$\{\varphi_k\}$收敛于$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$，当且仅当

(1) 存在紧集$K \subset \Omega$，$\text{supp}(\varphi_k) \subseteq K$对$\forall k$一致成立；

(2) 对任意多重指标α，$D^\alpha \varphi_k$一致收敛于$D^\alpha \varphi$.

定义5.2. Ω上的**分布**$u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$是$\mathcal{D}(\Omega)$上的线性泛函，满足:

$$\varphi_k \to \varphi \Rightarrow \langle u, \varphi_k \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$$

Ω上的全体分布构成的向量空间记为$D'(\Omega)$.

分布的定义有一个更易于使用的版本，即引入了(多重)范数：(这个范数记号与之前的L^p范数相同，不过在语境中个各位自然能够区分两者)

定理5.3. 线性泛函$u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$是$\Omega$上的分布，当且仅当对任意紧集$K \subset \Omega$，存在常数$C_K > 0, p_K \in \mathbb{N}$(依赖于$K$)满足

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C_K \|\varphi\|_{p_K}, \forall \varphi \in C_K^\infty$$

其中

$$\|\cdot\|_N : \|\varphi\|_N = \sup_{|\alpha| \leq N} \|D^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$$

特别地，如果常数$p_K = p$不依赖于K，则称p为u的**阶**.

证明. 必要性：给定K. 假设上述估计不成立，那么对$\forall k \in \mathbb{N}$，存在$\varphi_k \in \mathcal{D}(K)$满足(用仿射正规化)

$$\langle u, \varphi_k \rangle = 1, \quad \|\varphi\|_k \leq \frac{1}{k}$$

因此在$\mathcal{D}$拓扑下$\varphi_k \to 0$，这与u的连续性矛盾. 充分性留作练习. □

注. 从定义可以看出，分布的阶越高意味着分布的“正则”性越差，这个通过比较以下例子的阶就可以看出

下面给出一些重要例子.

例5.4. 局部可积函数$f \in L^1_{\text{loc}}$可以嵌入$\mathcal{D}'(\Omega)$中：

$$\varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$$

所以分布也常被称为广义函数.

例5.5. Dirac函数δ_a:

$$\langle \delta_z, \varphi \rangle = \varphi(a), a \in \Omega$$

练习1.(重要) 证明在分布意义下磨光子$\rho_t \to \delta_0$.

例5.6. Radon测度μ: 对Ω中的紧集K，都有$\mu(K) < \infty$. μ可以成为一个分布：

$$\varphi \mapsto \int_\Omega \varphi\,d\mu$$

例5.7. $\frac{1}{x}$的主值积分：由于$\frac{1}{x} \notin L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$，积分运算失效，但我们可以定义分布

$$\left\langle \text{p.v.}\frac{1}{x}, \varphi \right\rangle := \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x} = \lim_{\epsilon \to 0^+} \left\langle \frac{1}{x}\chi_{|x|>\epsilon}, \varphi \right\rangle$$

这个分布在调和分析以及PDE中应用广泛(Hilbert变换).

定理5.8.(唯一性) 嵌入映射

$$\pi : L^1_{\text{loc}}(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$$

是单射.

证要. 对任意含于Ω的紧集K，考虑试验函数

$$\begin{aligned} \varphi_K(x) &= \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|} \cdot \chi_K(x), \quad f(x) \neq 0 \\ &= 0, \quad f(x) = 0 \end{aligned}$$

将φ_K磨光为$\varphi_{K,t} \in \mathcal{D}(\Omega)$，当$t$充分小时$\text{supp}(\varphi_{K,t}) \subset \Omega$(对$\partial K$运用有限覆盖即可). 利用定理3.10的$L^1$收敛性将$t \to 0$. □

下面我们通过$C^\infty(\Omega)$上的运算来定义分布的各种运算. “对偶”的思想来源于分部积分公式.

定理5.9. 设连续算子T及其伴随T'均属于$\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$，则$T$可以延拓为$\mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$:

$$\langle Tu, \varphi \rangle := \langle u, T'\varphi \rangle, \quad \forall u \in \mathcal{D}'(\Omega), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

证要. 简单的定义验证. □

例5.10. 取限制：令$u \in \mathcal{D}'(\Omega), A \subset \Omega$. 定义$u$在$A$上的**限制映射**

$$\mathrm{Res}(u) : \langle \mathrm{Res}(u).\varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(A)$$

例5.11. $C^\infty(\Omega)$模结构：对$f \in C^\infty(\Omega), u \in \mathcal{D}'(\Omega)$，定义**乘积**

$$f \cdot u : \langle f \cdot u, \varphi \rangle = \langle u, f \cdot \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

例5.12. **变量代换**：设微分同胚$\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$，$u \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$，定义

$$u \circ \Phi \in \mathcal{D}'(\Omega_1), \quad \langle u \circ \Phi, \varphi \rangle = \left\langle u, \frac{\varphi \circ \Phi^{-1}}{|\mathrm{J}_\Phi \circ \Phi^{-1}|} \right\rangle$$

最有趣的运算可能是求导：

例5.13. 设$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$，定义$u$关于指标$\alpha$的**导数**为

$$D^\alpha u : \langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^\alpha \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

例5.14. Heaviside函数$H(t) := \chi_{x \geq 0} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$:

$$H' = \delta_0$$

例5.15. 对数函数$\ln|x| \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$:

$$(\ln|x|)' = \mathrm{p.v.}\frac{1}{x}$$

练习. 证明m阶分布u的导数$D^\alpha u$的阶$\leq |\alpha| + m$，并尝试举例说明不等号取等.
注. 所以如果将函数$f \in C_c^k$看作分布，则可以(形式上)认为$\deg f = -k$(各位自己验证一下).
这更进一步印证了之前定理5.3的注解中关于分布的奇异性与分布的阶之间关系的直觉.

根据定义5.10，对$\forall v \in \mathbb{R}^n$，可以定义分布的平移运算

$$\tau_v u : \langle \tau_v u, \varphi \rangle = \langle u, \tau_{-v} \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

据此我们给出**方向导数**的刻画.

定理5.16. 设$u \in \mathcal{D}'(\Omega), v \in \mathbb{R}^n$，则在分布意义下

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tau_{tv} u - u}{t} = \sum_{k=1}^n v_k D_k u$$

证要. 考虑多元Taylor公式(带一阶积分余项). □

可以在分布的框架下推广Newton-Leibniz公式.

命题5.17. 设$f \in L^1((a,b))$，定义原函数

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

则F是连续函数，且在分布意义下，

$$F'(x) = f(x)$$

借助分布的语言可以推广多元微积分中的Guass-Green散度定理：

定理5.18. 设Ω有界带边定向光滑，$v(x)$是$x \in \partial\Omega$处的单位外法向量，曲面测度为$d\sigma$. 那么$d\sigma$定义了分布

$$d\sigma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \varphi \mapsto \int_{\partial\Omega} \varphi(x)\,d\sigma$$

且在$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$上，

$$\nabla\chi_\Omega = -v\,d\sigma$$

分布的局部刻画与支集，分布的卷积

分布u是在$\mathcal{D}(\Omega)$上整体定义的，但下面的定理指出分布是一个局部对象.

定理5.19. 任给Ω中的一族开集$\{\Omega_i\}$，$\Omega_i \subset \Omega$，且

$$\Omega = \bigcup_{i\in I} \Omega_i$$

对每个Ω_i均赋予一个分布$u_i \in \mathcal{D}'(\Omega_i)$. 如果$\{u_i\}$满足相容性条件：

$$u_i\mid_{\Omega_i\cap\Omega_j} = u_j\mid_{\Omega_i\cap\Omega_j}, \quad \forall i,j \in I$$

则存在唯一的分布$u \in \mathcal{D}'(\Omega)$满足

$$u\mid_{\Omega_i} = u_i, \forall i \in I$$

证要. 证明依赖于拓扑学中一个经典程序:

单位分解定理：任给紧集$K \subset \mathbb{R}^n$，并被有限个开集$\{U_1,...,U_N\}$覆盖. 则存在光滑函数$\chi_k \in C_c^\infty(U_k)(1 \le k \le N)$满足

(1) $0 \le \chi_k(x) \le 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$；

(2) 存在开集$V\supset K$满足

$$\sum_{k=1}^{N}\chi_k(x)=1,\quad \forall x\in V$$

继而对任意$f\in\mathcal{D}$的支集取有限覆盖，将$f\cdot 1$单位分解. 证明需分三步：证明与覆盖选取无关；证明与紧集K的选取无关；证明拼接出的u确是一个分布. □

定理5.20说明要验证分布u的某一性质，那么在任意局部上验证即可. 为更精细地刻画分布的局部性质，引入以下概念.

定义5.20. 分布u在Ω上是零分布，当且仅当对$\forall\varphi\in\mathcal{D},\mathrm{supp}(\varphi)\subset\Omega$有$\langle u,f\rangle=0$.

自然地可以定义

定义5.21. 分布u的**支集**$\mathrm{supp}(u)$是满足u在其上为零分布的最大开集. 如果支集包含于一个紧集中，则称u为紧支分布. 紧支分布空间记为$\mathcal{E}'(\Omega)$.
注. 定义的合理性有待验证. 首先取所有满足零分布条件的开集之并U(当然还是开集)，只需验证u在U上是零分布：对于任意在U上的紧支撑光滑函数f，由紧性对f运用单位分解即可.

练习2. $u\in\mathcal{D}'(\Omega),f\in\mathcal{D}(\Omega)$. 设$u,f$的支集不交，证明$\langle u,f\rangle=0$
证要. 按定义

$$\langle fu,\varphi\rangle=\langle u,f\varphi\rangle$$

$\mathrm{supp}(fu)\subset$ f，按支集的定义得证. □

练习3. 设$f\in C^{\infty},u\in\mathcal{D}'$满足$f\cdot u=0$. 证明$u$在$f(x)\neq 0$的开集上是零分布.
证要. 设开集U上$f(x)\neq 0$，按定义,对$\forall\varphi\in\mathcal{D}(U)$

$$\begin{aligned}0&=\langle fu,\varphi\rangle=\langle fu\mid_U,\varphi\rangle\\&=\langle u\mid_U,f\mid_U\cdot\varphi\rangle\end{aligned}$$

$f\mid_U\neq 0$，所以$f\mid_U\cdot\mathcal{D}(U)=\mathcal{D}(U)$. □

练习4. 设$u\in\mathcal{D}'$. 证明$\mathrm{supp}(Du)\subseteq\mathrm{supp}(u)$.

定理5.21' 紧支分布的阶有限.
证要. 记$\mathrm{supp}(u)=K$，那么存在$\chi\in\mathcal{D}(\Omega)$，$\chi\mid_K\equiv 1$. 注意到一个重要事实

$$\langle u,f\rangle=\langle u,\chi\cdot f\rangle,\forall f\in\mathcal{D}(\Omega)$$

所以紧支分布作用在$\mathcal{D}(\Omega)$上可等价于在$\mathcal{D}(\mathrm{supp}(\chi))$上. 运用分布的定义即可. □
注. 这里用截断函数χ“记住”分布u的支集是一个相当好用的技巧，与前面研究分布的运

算时关于“对偶延拓”的思想相仿，都是把分布的性质转移到试验函数上.

下面可以逐步定义分布的卷积运算. 设$\Omega = \mathbb{R}^n, f \in \mathcal{D}$，考虑诱导的卷积算子

$$T_f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, u \mapsto u * f$$

计算得到其伴随$T_f' = T_{f^\vee}$. 根据定理5.9，定义**卷积**

$$* : \mathcal{D} \times \mathcal{D}' \mapsto \mathcal{D}', \langle f * u, \varphi \rangle = \langle u, f * \varphi \rangle$$

若将x看做分布u的参数，我们可以推广一下，为分布建立与含参变量积分的平行的结论：交换分布与求导/积分的顺序.

定理5.22. 给定分布$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，双变量试验函数$\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$. 定义函数

$$\psi(x) = \langle u, \varphi(x, \cdot) \rangle$$

则有以下结论：
(1) $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$，且分布与参数的导数可交换：

$$D^\alpha \psi(x) = \langle u, D_x^\alpha \varphi(x, \cdot) \rangle$$

(2) 分布与参数的积分可交换：

$$\int_{\mathbb{R}^m} \psi(x)\, dx = \left\langle u, \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x, \cdot)\, dx \right\rangle$$

证要. (1)：设$\text{supp}(\varphi) \subset K \times K'$，其中$K, K'$是紧集，显然$\text{supp}(\psi) \subset K$. 根据归纳法，我们只需证明$\psi \in C^1$. 固定$x = x_0$，对$\forall \epsilon > 0, y \in \mathbb{R}^n$，$v \in \mathbb{R}^m (|v| = 1)$，考虑Taylor公式带2阶积分余项：

$$\begin{aligned} &\varphi(x_0 + \epsilon v, y) - \varphi(x_0, y) - \epsilon D_v \varphi(x_0, y) \\ =&\epsilon^2 \cdot r(\epsilon, v, y) \end{aligned} \tag{*}$$

其中

$$r(\epsilon, v, y) = 2 \sum_{|\alpha|=2} \frac{v^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t) D_x^\alpha \varphi(x_0 + t\epsilon v, y)\, dt$$

令u作用于$(*)$等式两边得到

$$\begin{aligned} &\frac{\psi(x_0 + \epsilon v) - \psi(x_0)}{\epsilon} - D_v \varphi(x_0, y) \\ =&\epsilon \langle u, r_{\epsilon, v, y} \rangle \end{aligned}$$

只需估计对$0 < \epsilon < 1$，$r(\epsilon, v, y)$在试验函数的多重范数意义下<u>一致有界</u>(即对ϵ，(a)有公共紧的支集;(b)且各阶导数的L^∞一致有界). 这留作简单的数分练习. □
(2)：由归纳法，只需证明$m = 1$的情形. 因为光滑性，这里可以采用Riemann积分. 不妨

设K我们考虑细度$1/k$的Riemann和：

$$\varphi_k(y) = \frac{1}{k}\sum_{|i|\le k}\varphi(\frac{i}{k}R, y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

由于φ_k是有限和形式，分布与有限和当然可以交换. 所以只需证明在$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$的拓扑下

$$\varphi_k(y) \to \int_{\mathbb{R}^1}\varphi(x,\cdot)\,dx, \quad k\to\infty$$

考虑

$$\begin{aligned}\phi_k(y) &= \int_{\mathbb{R}^1}\varphi(x,\cdot)\,dx - \varphi_k(y)\\ &= \sum_{|i|\le k-1}\int_{R\cdot i/k}^{R\cdot(i+1)/k}\varphi(x,y)-\varphi(\frac{i}{k}\cdot R, y)\,dx\end{aligned}$$

显然$\mathrm{supp}(\phi) \subset K'$一致成立. 根据控制收敛定理推论可以交换导数与积分顺序，进而给出$\left\|D^\beta\phi_k\right\|_\infty$的一致估计. □

注. 在证明(2)时应用的技巧也可见于全纯函数的含参积分是全纯函数的证明(参考Stein的*Complex Analysis*,p56-57).

作为上述定理的推论，卷积能够提升正则性：

定理5.22'. 设$f\in\mathcal{D}, u\in\mathcal{D}'$. 则$f*u\in C^\infty$，且

$$D^\alpha(f*u) = D^\alpha f * u = f * D^\alpha u$$

证要. 我们考虑卷积的另一个表示

$$f*u(x) = \langle u, f(x-\cdot)\rangle$$

(请计算验证$\langle\langle u, f(x-*)\rangle, \varphi\rangle = \langle u, \langle f(\cdot - y)\varphi\rangle\rangle$. 光滑函数$\langle u, f(x-\cdot)\rangle$自然局部可积，由嵌入的唯一性可知该表达式就是$f*u$)

表达式良定义显然. 如此便可应用上一个定理. □

练习5. $\mathrm{supp}(f*u)\subset\mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(u)$. 特别地

$$*:\mathcal{D}\times\mathcal{E}'\to\mathcal{D}$$

练习6. 验证卷积的结合律： $f*(g*u) = (f*g)*u$.

证要. 运用积分与分布的换序. □

练习7.(重要) 卷积的恒等元：

$$f*\delta = f, \forall f\in\mathcal{D}$$

利用卷积，我们得到相当有用的技术：分布意义下的<u>光滑逼近</u>(这是函数版本的类比).

定理5.23. 给定磨光子$\{\rho_t\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. 对于$\forall u \in \mathcal{D}'(\mathcal{R}^n)$，在分布意义下，

$$\rho_t * u \to u, \quad t \to 0$$

其中$\rho_t * u \in C^\infty$.
证要. 按定义，我们给出

$$\langle \rho_t * u, \varphi \rangle = \langle u, \varphi * \rho_t^\vee \rangle$$

只需证明在$\mathcal{D}$的拓扑下$\rho_t * \varphi \to \varphi$. 留作计算习题. □

作为光滑逼近的第一个应用，可以证明分布为常数的充分条件：一阶导数为0.

定理5.24. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$是连通开集，设分布$u$的所有1阶导数$D_j u$是$\Omega$上的零分布，则在分布意义下$u$等于常数.
证要. 不妨设$\text{supp}(\rho_t) \subset B(0,t)$. 则$\text{supp}(D_j(\rho_t * u)) = \text{supp}(\rho_t * D_j u) \subset \mathbb{R}^n \backslash \Omega + B(0,t)$，所以令$\Omega_t$由$\Omega$中所有距离边界大于$t$的点构成. $u_t = \rho_t * u$光滑，所以$u_t \mid_{\mathbb{R}^n \backslash \{0\}} \equiv C_t$. 对$f \in \mathcal{D}(\Omega_t)$，在分布意义下

$$\langle u_t, f \rangle = C_t \int_{\mathbb{R}^n} f$$

根据光滑逼近，左式$\to \langle u, f \rangle$，所以$C_t \to C < \infty$存在(请验证C与f的选择无关)，$u \mid_{\Omega_t} = C$. 令$t \to 0$即得证. □

光滑逼近说明在分布意义下，试验函数和紧支分布差别很小. 受此启发，我们进一步地推广卷积：定义分布与紧支分布的卷积.

定义5.25. 设$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n), c \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$，则定义**卷积**

$$* : \mathcal{E}' \times \mathcal{D}' \to \mathcal{D}', \langle c * u, \varphi \rangle := \langle u, \varphi * c^\vee \rangle$$

注. 当然需要证明这是良定义的，即$c * u$是分布：首先$\varphi * c^\vee$紧支撑. 再由$c \in \mathcal{E}'$阶有限，按定义验证即可. □

例5.26.(重要) Dirac分布与平移

$$\delta_a * u = \tau_a u, \quad \forall u \in \mathcal{D}', a \in \mathbb{R}^n$$

特别地有卷积的恒等元δ

$$\delta * u = u$$

练习8. $\text{supp}(c * u) \subset \text{supp}(c) + \text{supp}(u)$. 特别地，

$$* : \mathcal{E}' \times \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$$

练习9. 卷积与导数可交换：

$$D^\alpha (c * u) = D^\alpha c * u = c * (D^\alpha u)$$

证要. 直接按定义计算，并使用定理5.22'. □

应当指出在$\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$卷积满足更多运算性质：

定理5.27. 卷积$* : \mathcal{E}' \times \mathcal{E}' \to \mathcal{E}'$满足交换律.
证要. 我们采用光滑逼近将$\mathcal{D}$上的交换律转移到$\mathcal{E}'$上. 设分布意义下的光滑逼近$c_{2,t} \to c$，取试验函数$\varphi * c_1^\vee$，根据卷积的定理和练习6版本的结合律计算

$$\begin{aligned}
\langle c_1 * c_{2,t}, \varphi \rangle &= \langle c_{2,t}, \varphi * c_1^\vee \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} c_{2,t}(x) \varphi * c_1^\vee (x) \, dx \\
&= \left\langle c_1^\vee, \int_{\mathbb{R}^n} c_{2,t}(x) \varphi(x - \cdot) \, dx \right\rangle \\
&= \langle c_1^\vee, c_{2,t} * \varphi^\vee \rangle \\
&= \langle c_1^\vee, \varphi^\vee * c_{2,t} \rangle \, (\textit{here we change the order}) \\
&= \langle c_1, (\varphi * \rho_t^\vee) * c_2^\vee \rangle \, (\textit{here we use the associative law}) \\
&= \langle c_2 * c_1, \varphi * \rho_t^\vee \rangle
\end{aligned}$$

两边令$t \to 0$即得证. □

利用交换律可以得到

定理5.28.(卷积的连续性) 设有公共支集的紧支分布列$c_k \to c$. 又有分布列$u_k \to u$，则

$$c * u_k \to c * u, c_k * u \to c * u$$

证要. 第一个极限直接按定义计算即可；第二个极限的困难在于按定义展开后试验函数本身是一个序列，不太好处理. 我们利用交换律来化解：用截断函数ψ记住$\varphi * c_k^\vee$的公共支集以

实现u的紧支化

$$
\begin{aligned}
\langle c_k * u, \varphi \rangle &= \langle u, \varphi * c_k^{\vee} \rangle \\
&= \langle u, \psi \cdot \varphi * c_k^{\vee} \rangle \\
&= \langle c_k * (\psi \cdot u), \varphi \rangle \\
&= \langle c_k, \varphi * (\psi \cdot u) \rangle \, (here\ we\ change\ the\ order) \\
&\to \langle (\psi \cdot u) * c, \varphi \rangle \\
&= \langle (\psi \cdot u), \varphi * c^{\vee} \rangle \, (here\ we\ change\ the\ order) \\
&= \langle u, \varphi * c^{\vee} \rangle = \langle c * u, \varphi \rangle . \quad \square
\end{aligned}
$$

定理5.29. 对于$c_1, c_2 \in \mathcal{E}', u \in \mathcal{D}'$，卷积满足结合律:

$$c_2 * (c_1 * u) = (c_2 * c_1) * u$$

证要. c_1, c_2均运用光滑逼近，最后通过卷积的连续性得到原结论. □

对于$\mathcal{E}'$，定理5.22可以推广：与光滑函数卷积.

定理5.30. 将$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$视为分布，则

$$* : C^\infty \times \mathcal{E}' \to C^\infty$$

证要. 首先紧支分布作用于光滑函数等价于分布作用于支集上的试验函数. 所以对$\mathbb{R}^n$单位分解，并在每个局部上运用定理5.22'(注意，使用单位分解时每个局部至多支撑有限个分解函数，所以导数与求和可以交换). □

Laplace算子的基本解，初探椭圆PDE

这一章我们借助分布语言研究Laplace算子Δ与相应的Poisson方程

$$\Delta u = f, \quad f \in \mathcal{E}' \tag{*}$$

的"弱解". 根据第4章L^1上的Fourier变换一节最后的讨论和本章练习8，我们来研究所谓的“基本解”

$$E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : \Delta E = \delta$$

如果能求出E，那么按照之前的讨论(*)在分布意义下存在解

$$u = E * f \in \mathcal{D}'$$

先将上面的讨论严格化.

定义5.31. 对于多重指标α，指定复值函数$a_\alpha \in C^\infty$，对于$N \in \mathbb{N}$以下形式的算子

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \le N} a_\alpha \cdot D^\alpha$$

称为N次**线性微分算子**. 如果a_α均为常数，则称之为**常系数**；如果$a_\alpha = 0, \forall |\alpha| < N$，则称之为$N$次**齐次**.

显然$P(d)$可以作用在分布上，其伴随算子

$$P'(D) = \sum_{|\alpha| \le N} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (a_\alpha \cdot)$$

定义5.32. 给定$\mathcal{R}^n$上的常系数线性微分算子P，如果存在分布$E \in \mathcal{D}'$满足

$$P(E) = \delta$$

则称E为算子P的**基本解**.
注. 有一个著名定理

定理.(Malgrange-Ehrenpreis) $\mathbb{R}^n$上的常系数线性微分算子都有基本解.

M和E最初的证明都使用了泛函分析中的Hahn-Banach定理，这里当然讲不了. 分析学大师L. Hörmander给出了一个相对初等的证明. 他实际上证明了以下L^2先验估计

定理.(Hörmander) If Ω is a bounded set in $\mathbb{R}^n$, and if $P(D)$ is non-zero, there exists a constant $C > 0$ such that for every C^∞-function φ with compact support in Ω,

$$\|P(D)\varphi\|_2 \ge C \|\varphi\|_2$$

证明相当长，建议大家查阅Stein实分析讲Hilibert空间例子的章节或者Hörmander发表在四大之一*Acta Math*的原论文*On the theory of general partial differential operators*的定理2.6.

基本解的重要性在于，如果常系数微分算子$P(D)$有基本解$E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，那么对于方程

$$P(D)u = f, \quad f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

作计算

$$\begin{aligned} f =& \delta * f = f * (P(D)E) \\ =& P(D)(f * E) \end{aligned}$$

这样我们就得到了方程的一个弱解$E*f$. 假设$P(D)u=f$的另一个解v，则

$$
\begin{aligned}
v &= \delta * v = v * P(D)E \\
&= P(D)v * E = f * E \\
&= u
\end{aligned}
$$

如此我们得到分布意义下方程解的存在唯一性!

下面介绍分布理论在PDE的一些具体应用.

练习10.(来自品神的讲义第3卷p769) 练习旨在应用基本解理论研究Poisson方程解的性质. 设$n \geq 3$.

(1) 证明Laplace算子Δ的基本解是所谓的Newton位势

$$E = \frac{1}{(2-n)\left|\mathbf{S}^{n-1}\right|} \cdot |x|^{2-n}, \quad n \geq 3$$

注. 注意到E局部可积，当然是分布.
提示. 核心是分布的散度定理(定理5.18).

(2) 证明$\frac{\partial E}{\partial x_i} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \quad 1 \leq i \leq n$，故也是分布. 并(在分布意义下)有

$$\frac{\partial E}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{\left|\mathrm{S}^{n-1}\right|} \cdot \frac{x_i}{|x|^n}$$

出于物理考虑，下面设$n=3$，$f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$. 作为基本解的应用，这里指出一个令人惊诧的事实:“椭圆正则性”，即原方程假定解是分布且方程只涉及一部分二阶导数，但能先验地指出解的光滑性(至少要严格地比f更光滑，严谨叙述需要Sobolev空间的语言，下一章我们再谈).

(3) 对任意的 $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$，如果它们满足Poisson方程(*)，则$u$在 $\mathrm{supp}(f)$ 之外是光滑的，即

$$u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \mathrm{supp}(f))$$

(4) 证明**Weyl定理**：开集$\Omega \subset \mathbb{R}^3$上的调和分布是光滑函数.

(5) 证明**椭圆正则性**：设开集$\Omega \subset \mathbb{R}^3$上的分布$u$和光滑函数$f$满足Poisson方程(*)，则$u \in C^\infty(\Omega)$.
注. 椭圆正则性是一类广泛的现象，后面我们会着手证明，并解释“椭圆”一词的来源.

值得注意的是，椭圆正则性对于非椭圆方程不成立，比如对于“双曲方程”的典例波方程:

(6) 证明对于任何一对分布$l, m \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^1)$，

$$u = l(x+t) + m(x-t)$$

都是一维波方程

$$(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2})u = 0$$

的弱解.

(7) 给定$f \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^3)$，证明$u = f * E$是Poisson方程(*)的解，且有渐进性质：

$$|f * E(x)| = O(|x|^{-1})$$

(8) 在(7)条件下进一步证明渐进性质：

$$\left| u(x) + \frac{\langle f, 1\rangle}{4\pi |x|} \right| = O(|x|^{-2})$$

基本解还可以用于证明所谓的**Schauder型估计**，即弱解的$\alpha-$Hölder连续性. 这对一般的“椭圆方程”均成立，但这里我们选择对最基本的Poisson方程作直接计算来证明. 首先在有界开集Ω上定义**Hölder空间**$C^{k,\alpha}$

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{f \in C^k(\Omega) \mid D^\beta f \in C^{0,\alpha}(\Omega), \quad \forall |\beta| \le k\}$$

其中$0 \le \alpha \le 1$，并配备**Hölder范数**

$$\|f\|_{k,\alpha} := \sum_{|\beta| \le k} (\sup_{x \in \Omega} \left| D^\beta f(x) \right| + \sup_{x,y \in \Omega; x \ne y} \frac{\left| D^\beta(x) - D^\beta(y) \right|}{|x-y|^\alpha})$$

练习11. 设$0 < \alpha < 1$,f是支撑在有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^3$上的$L^\infty$函数. 那么根据练习10，Poisson方程$\Delta u = f$有弱解

$$u(x) := \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy$$

(1) 证明$u \in C^0(\mathbb{R}^3)$.

(2) 证明$u \in C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3), \quad \forall 0 < \alpha < 1$. 并对$i = 1, 2, 3$有

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \cdot \frac{x_i - y_i}{|x-y|^3}\, dy$$

进一步，给定$\alpha \in (0, 1)$，设$f \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$.

(3) 证明$u\in C^2(\mathbb{R}^3)$，并对$i,j=1,2,3$有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{1}{4\pi}\cdot f*\text{p.v.}K_{i,j}$$

其中(δ_{ij}是关于$i,j=1,2,3$的Kronecker符号)

$$K(x):=\frac{3x_ix_j}{|x|^5}-\frac{\delta_{ij}}{|x|^3}$$

(4) 证明$u\in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^3)$，并建立Schauder型估计

$$\|u\|_{k,\alpha}\le C_\alpha\|f\|_{0,\alpha}$$

其中C_α仅与α有关.

(5) 举例说明$\alpha=0$时Schauder估计不成立.

练习12. 分布理论在复分析中的应用：证明Cauchy-Riemann方程

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}u:=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y})u=0$$

的基本解是$\frac{1}{\pi z}$. 进而证明全纯函数的光滑性.

注.对于练习12，我们给出一个间接的提示：Cauchy积分公式一个非常优雅的证明. 证明需要一些微分流形的基础. 自然地前提是有界区域Ω有分段C^1-边界$\partial\Omega$.

Cauchy积分公式证明. 首先对全纯函数v

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=\frac{\partial v}{\partial z}dz+\frac{\partial v}{\partial\bar z}d\bar z$$

其中在Ω的切丛$T\Omega$中定义基底变换

$$\frac{\partial}{\partial z}:=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y})$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar z}:=\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial x})$$

以及在余切丛$T^*\Omega$上对应有$dz,d\bar z$(变换矩阵是基底变换矩阵的转置逆，即对偶)

$$dz=dx+idy,d\bar z=dx-idy$$

引入微分形式的语言，计算得到

$$\mathrm{d}(v\,dz)=-\frac{\partial v}{\partial\bar z}\,dz\wedge d\bar z$$

对$\forall\zeta\in\Omega$，圆周$B(\zeta,r)$，$\frac{1}{z-\zeta}$在$\Omega\setminus B(\zeta,r)$上全纯. 取$v=u/(z-\zeta)$，其中$u$全纯. 根

据Stokes公式，

$$\int_{\Omega\setminus B(\zeta,r)}\frac{\partial v}{\partial\bar z}\,dz\wedge d\bar z=\int_{\partial\Omega-\partial B(\zeta,r)}v\,dz$$

代入并整理

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega\setminus B(\zeta,r)}\frac{\partial v}{\partial\bar z}\,dz\wedge d\bar z\\=&\int_{\Omega\setminus B(\zeta,r)}\frac{\partial u}{\partial\bar z}\cdot\frac{1}{z-\zeta}+u(z)\cdot\frac{\partial}{\partial\bar z}\frac{1}{z-\zeta}\,dz\wedge d\bar z\\=&0\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega-\partial B(\zeta,r)}v\,dz\\=&\int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-\zeta}\,dz-\int_{\partial B(\zeta,r)}u(z)\cdot\frac{1}{z-\zeta}\,dz\\=&\int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-\zeta}\,dz-\int_{\partial B(\zeta,r)}u(\zeta+re^{i\theta})\cdot\frac{1}{re^{i\theta}}\,d\,re^{i\theta}\\=&\int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-\zeta}\,dz-\int_0^{2\pi}u(\zeta+re^{i\theta})\cdot i\,d\theta\end{aligned}$$

令$r\to 0$，得到

$$\int_{\partial\Omega}\frac{u(z)}{z-\zeta}\,dz=2\pi i\cdot u(\zeta),\quad\forall\zeta\in\Omega^\circ$$

Cauchy积分公式成立. 特别地，取$u(z)=f(z)\cdot(z-\zeta)$(其中f全纯)即可得到Cauchy定理:

$$\int_{\partial\Omega}f(z)\,dz=0$$

我们完成了证明. □

各位可以思考上述证明何处体现$1/z$是C-R方程的基本解？

Schwartz空间$\mathcal{S}$，缓增分布$\mathcal{S}'$与Fourier变换

(设$\Omega=\mathbb{R}^n$)我们回顾第3章如何定义Fourier变换：在L^1上定义积分变换

$$\mathcal{F}(f)(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)e^{-2\pi i\xi\cdot x}\,dx$$

在定义L^2上定义是通过L^1,L^2的公共稠密集C_c^∞来定义. 两个定义都严格依赖于映射$\mathcal{F}$的有界性：

$$\mathcal{F}:L^1\to L^\infty,\quad L^2\to L^2$$

然而一则对于更广泛的函数类(哪怕是最简单的$\chi_{\mathbb{R}^n}$)，Fourier积分都无法定义；二则对于L^p的所有指标似乎无法得到$\mathcal{F}$的有界性(通过Riesz-Thorin复插值定理也只能证明$1\le p\le 2$的情形).

种种困难都指出Fourier变换的定义需要推广，不然之前因Fourier变换享受到的好处就

太局限了. 命题3.14告诉我们$\mathcal{F}$的伴随就是$\mathcal{F}$自身(即自伴). 那么根据定理5.9，我们希望将Fourier变换推广至$u \in \mathcal{D}$上:

$$\mathcal{F}(u) = \widehat{u} : \langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle \tag{*}$$

如此大大延拓了Fourier变换的定义域，同时借助之前分布理论的成功可以期待原有的性质能够继承. 但一个致命的缺陷在于一般情况下对于$\varphi \in \mathcal{D}$，$\underline{\widehat{\varphi} \notin \mathcal{D}}$，$(*)$的右式没有定义!

如何规避这一缺陷？L. Schwartz构思了新的试验函数空间：首先对支集不能有限制，因此要保证函数物理和频率的衰减性；同时光滑性好保证分布运算的多样性. 注意到第三章我们已经证明过频率的衰减性$\sim$物理的光滑性，所以Schwartz构造

定义5.33. 称函数$f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$是**速降函数**，如果对任意多重指标$\alpha, \beta$

$$x^\alpha D^\beta f \in L^\infty.$$

$\mathbb{R}^n$上的所有速降函数构成了**Schwartz空间**$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，配备多重范数

$$\|f\|_{N,S} := \sum_{|\alpha|,|\beta| \le N} \left\| x^\alpha D^\beta f \right\|_\infty$$

并定义拓扑：$f_n \to f \in \mathcal{S}$当且仅当对$\forall N \in \mathbb{N}$，

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{N,S} \to 0$$

例5.34. 显然$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$.

例5.35. $e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

练习13. 设$f \in \mathcal{S}$. 证明对$\forall \alpha, \beta$，$x^\alpha D^\beta f \in \mathcal{S}$.

练习14. 设$f, g \in \mathcal{S}$. 证明$f * g \in \mathcal{S}$.

练习15.(重要) 设$N \in \mathbb{N}, |\alpha|, |\beta| \le N$. 证明以下估计

$$\left\| x^\alpha D^\beta f \right\|_1 \le C_n \|f\|_{N+n+1,S}, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathcal{R}^n)$$

其中常数C_n只与n有关.
注. 练习指出

$$S(\mathcal{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n), \quad \forall 1 \le p \le \infty$$

命题5.36.(重要) 证明$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$稠密.
证要. 考虑截断函数χ:

(1) $\chi \in \mathcal{D}$，$0 \le \chi \le 1$；

(2) $\chi(x) \equiv 1, \quad \forall |x| \le 1.$

对$f \in \mathcal{S}$，构造C_c^∞列

$$f_n: \quad f_n(x) = \chi(\frac{x}{n}) \cdot f(x)$$

证明在$\mathcal{S}$拓扑下$f_n \to f$. □

下面建立$\mathcal{S}$上的Fourier变换理论，这将印证我们前面的构造动机. $\mathcal{S} \subset L^1$，Fourier变换自然良定义.

命题5.37. 设$f \in \mathcal{S}$，验证公式：

$$(D^\alpha f)\widehat{\ }(\xi) = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

以及

$$D^\alpha \widehat{f}(\xi) = ((-2\pi ix)^\alpha f)\widehat{\ }(\xi)$$

证明. 当$|\alpha| = 1$对任意$f \in \mathcal{S}$，$\forall k \leqslant n$，利用分部积分，我们有

$$\widehat{\partial_k f}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i\xi_k) e^{-2\pi ix\cdot\xi} f(x)dx = 2\pi i\xi_k \widehat{f}(\xi)$$

第二个等式要用控制收敛定理的推论(积分与求导数可交换)，我们有

$$\partial_{\xi_k} \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi ix_k) e^{-2\pi ix\cdot\xi} f(x)dx = (-2\pi ix_k f)\widehat{\ }(\xi)$$

推广到多重指标上便完成了命题的证明. □

定理5.38. $\mathcal{S}$上的Fourier变换$\mathcal{F}$是连续线性同构：

$$\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}, f \mapsto \widehat{f}$$

且在$\mathcal{S}$拓扑下

$$f_n \to f \Rightarrow \widehat{f_n} \to \widehat{f}, \quad n \to \infty$$

同时Fourier反演$\mathcal{F}^{-1}$存在且连续.

证明. 先给出光滑性导致的频率衰减. 给定任意$p \in \mathbb{N}_+$固定两个多重指标α和β，其中$|\alpha|, |\beta| \leqslant p$. 利用已经证明的公式，我们就有

$$\begin{aligned}
|\xi^\alpha \partial_\xi^\beta \widehat{f}(\xi)| &= |\widehat{\partial^\alpha (x^\beta f)}(\xi)| \\
&\leqslant \|\partial^\alpha (x^\beta f)(x)\|_{L^1} \\
&\leqslant C_p \|f\|_{p+n+1,S}
\end{aligned}$$

Fourier变换的连续性可以由这个估计得到：对任意给定p，我们有

$$\left\|\widehat{f_n}-\widehat{f}\right\|_{p,S} \leqslant C_p \|f_n - f\|_{p+n+1,S} \to 0$$

按照定义，我们就有$\mathcal{S}$拓扑下

$$\widehat{f_n} \to \widehat{f}, \quad n \to \infty$$

最后，我们来说明$\mathcal{F}$是同构. 实际上可以直接定义Fourier变换的逆$\mathcal{F}^{-1}$，因为$\widehat{f} \in L^1$，所以之前的$\mathcal{F}^{-1}$也是良定义. 类似前面的论证命题即得证($\mathcal{F}^{-1}$也是连续的). □

现在已经做好定义$\mathcal{S}$上的分布的准备了.

定义5.39. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上的对偶空间(即$\mathcal{S}$所有连续线性泛函构成的线性空间)$\mathcal{S}'(\mathcal{R}^n)$称为**缓增分布**空间. 并赋予拓扑：给定缓增分布的序列$\{u_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，称它在$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$的意义下收敛到$u \in \mathcal{S}'(\Omega)$，当且仅当对$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，都有

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k, \varphi\rangle = \langle u, \varphi\rangle.$$

定理5.40. $\mathcal{S}$上的线性泛函$u \in S'$当且仅当存在常数$C > 0$，$N \in \mathbb{N}$：

$$|\langle u, \varphi\rangle| \le C \|\varphi\|_{N,S}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

注. 请与关于分布的定理5.3的表述进行对比.
证要. 类似定理5.3. □

由于$\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$稠密，承接上述定理可以得到一个判别$u \in \mathcal{D}'$是缓增分布的法则：

定理5.41.设$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，如果$u$满足

$$|\langle u, \varphi\rangle| \leqslant \|\varphi\|_p, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

则存在唯一的缓增分布T_u，对于$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，都有

$$T_u(\psi) = \langle u, \psi\rangle.$$

因此仍将此缓增分布记作$\langle u, \cdot\rangle$.
注. 证明方法是老生常谈的稠密性技巧，注意结论与逼近列的选择无关.

对任意$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，我们选取$\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$为$\varphi$在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$中的逼近序列，那么，

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha u, \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|} \lim_{k\to\infty} \langle u, \partial^\alpha \varphi_k\rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^{|\alpha|}\varphi\rangle\end{aligned}$$

所以仍然有类似于分布情形的公式：

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

类似地还有

$$\langle x^\beta u, \varphi \rangle = \langle u, x^\beta \varphi \rangle$$

给定$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$和多重指标$\alpha$，$\beta$，作为$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，自然有$\partial^\alpha u, x^\beta u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. 而且实际上对$\forall \varphi$，按照定义有

$$|\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle| = |\langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle| \leqslant C \left\| \varphi \right\|_{p+|\alpha|, S}.$$

这表明$\partial^\alpha u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 类似地，我们有$x^\beta u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. (上面的论述不过是把对偶原理的证明重新走了一遍)

但如果f仅仅是光滑函数，那么

$$\langle fu, \varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}} = \langle u, f\varphi \rangle_{\mathcal{S}' \times \mathcal{S}}.$$

并不成立，因为通常而言$f\varphi \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.
(注意对偶原理成立需要算子及其伴随算子<u>均为</u>有界算子.)

容易得到

练习16. 对任意的多重指标α和β，我们有如下的连续映射

$$x^\alpha : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$
$$\partial^\beta : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

即

(1) 如果$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，那么$\partial^\alpha u, x^\beta u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
(2) 如果缓增分布的收敛序列$u_k \to u$，那么它在求导数和乘多项式下被保持：

$$\partial^\alpha \to \partial^\alpha u, \quad x^\beta u_k \to x^\beta u.$$

我们现在看一些缓增的分布的例子：

例5.42. 设$1 \leq p \leq \infty$，我们可以将函数空间$L^p(\mathbb{R}^n)$视为分布，那么它们是缓增的分布.
证要. 基本思想是分离出分母上的多项式因子来保证可积性. 设$f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，那么，对任意

的$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\begin{aligned}|\langle f, \varphi\rangle| &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} \cdot \left((1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \varphi\right) dx \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} dx\right) \|f\|_{L^\infty} \cdot \|\varphi\|_{n+1,S}\end{aligned}$$

$1 \leq p < \infty$的情况类似，不过要用$H\ddot{o}lder$不等式配凑对应的指标并保证可积性，留作练习. □

例5.43. 有紧支集的分布$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$是缓增的分布：因为每个紧支集的分布都有限阶的分布.

例5.44. 分布p.v.$\frac{1}{x}$是缓增的分布：
证明. 实际上可以把它写成

$$\text{p.v.}\frac{1}{x} = \chi_{x|<1} \cdot \text{p.v.}\frac{1}{x} + \chi_{|x|\geqslant 1} \cdot \text{p.v.} \cdot \frac{1}{x}.$$

第一项$\in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$，第二项$\in L^\infty$. □

例5.45. 局部可积并且具有多项式增长的函数是缓增的分布，即对于$f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$，如果存在常数$C$和$m$，使得对任意的$x \in \mathbb{R}^n$，我们都有

$$|f(x)| \leq C(1+|x|)^m,$$

那么$f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.
证明. 对任意的试验函数$\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\begin{aligned}|\langle f, \varphi\rangle| &= \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx\right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+|x|)^{m+n+1}} \cdot (1+|x|)^{m+n+1}|\varphi(x)|\, dx \\ &\leqslant C\, \|\varphi\|_{m+n+1,S} \cdot\end{aligned}$$

因为乘积式第一项可积，而第二项$\leqslant C'N_{m+n+1}(\varphi)$有界. □

例5.46. 函数e^x所定义的分布不是缓增的分布.
证明. 考虑e^x的暴涨性质，构造试验函数$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$，使得$\chi\big|_{[0,1]} \equiv 1$并且$\chi \geqslant 0$. 令$\chi_n = \chi(x-n)$. 如果$e^x$是缓增的分布，那么，存在$p$，使得

$$\int_{\mathbb{R}} e^x \chi_n(x) dx \leqslant C \sup_{|\alpha|,|\beta|\leqslant p} \|x^\alpha \partial^\beta \varphi_n\|_{L^\infty} \leqslant Cn^p.$$

然而，

$$\int_{\mathbb{R}} e^x \chi_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^x \chi(x-n) dx \geqslant \int_{[n,n+1]} e^x dx \geqslant e^n.$$

令$n \to \infty$，得到矛盾. □

例5.47. 指数增长速度的函数也可以是缓增的分布．我们设有界函数$u = e^{ie^x}$，它是缓增分布，那么它的导数$u' = ie^x \cdot e^{ie^x}$也是缓增的，但显然u'是指数增长的函数．真正刻画$\mathcal{S}$需要同时在物理空间和频率空间上讨论，此处按下不表.

顺水推舟，我们定义$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$的**Fourier变换**：

定义5.48. 对任意的$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，令

$$\langle \widehat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle.$$

类似地定义**Fourier逆变换**$\mathcal{F}^{-1}$：

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(u), \varphi \rangle = \langle u, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle$$

定理5.38已经指出$\mathcal{S}$上的Fourier变换(以及Fourier逆变换)：是连续的同构，而且证明过程得到了如下估计：对任意的$p \in \mathbb{N}_+$，存在常数$C_p > 0$，使得

$$\|\widehat{\varphi}\|_p \leqslant C_p \|\varphi\|_{p+n+1}, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

据此对任意$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，有如下估计

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{u}, \varphi \rangle| =& |\langle u, \widehat{\varphi} \rangle| \\ \leqslant& C \|\widehat{\varphi}\|_{p,S} \\ \leqslant& CC_p \|\varphi\|_{p+n+1,S} \end{aligned}$$

这就验证了$\widehat{u} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$良定义.

定理5.49. 缓增分布的Fourier变换

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n),$$

是连续线性同构，这里连续性指的是对任意的在$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$中收敛的缓增分布的序列$u_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} u$，我们都有$\widehat{u_k} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \widehat{u}$. 进一步，对每个$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，如下的公式成立：

$$\widehat{\partial_k u} = 2\pi i \xi_k \widehat{u}, \quad \widehat{x_k u} = i\partial_k \widehat{u}$$

并且$\mathcal{F}, \mathcal{F}^{-1}$有关系

$$\mathcal{F}^{-1}(u) = \mathcal{F}(u^\vee), \quad \mathcal{F}^2(u) = u^\vee$$

证要. 先验证连续性：假设$u_k \xrightarrow{\mathcal{S}'} u$，那么，对任意的Schwartz函数$\varphi$，我们都有

$$\langle \widehat{u_k}, \varphi \rangle = \langle u_k, \widehat{\varphi} \rangle \to \langle u, \widehat{\varphi} \rangle = \langle \widehat{u}, \varphi \rangle.$$

所以分布意义下$\widehat{u_k} \to \widehat{u}$. 另外，由于

$$\langle \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(u)\right), \varphi \rangle = \langle u, \mathcal{F}^{-1}\left(\mathcal{F}(\varphi)\right) \rangle = \langle u, \varphi \rangle.$$

所以，$\mathcal{F}$与$\mathcal{F}^{-1}$互为逆，从而，$\mathcal{F}$是缓增分布上的同构.
定理中的公式的验证也是直接的，因为可以把$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$中的运算对偶到$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上来验证，而对于$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上这三个公式已经证明过了. □

缓增分布的Fourier变换是函数的Fourier变换的自然推广.

命题5.50. 假定$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$(或者$L^2(\mathbb{R}^n)$)，那么，它作为缓增分布的Fourier变换与它作为L^1(或L^2)函数的Fourier变换是一致的.
证明. 为区分记号，$\mathcal{S}'$中的Fourier变换记为$\widehat{\ }$.
先假设$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$，我们把它在L^1意义下的Fourier变换记为$\mathcal{F}_1(f)$. 由于$\mathcal{F}_1(f) \in C_0(\mathbb{R}^n)$，所以，对$\forall \varphi \in \mathcal{S}$，由Fubini定理

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_1(f), \varphi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}_1(f)(\xi)\varphi(\xi)d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\varphi(\xi)dxd\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(\xi)d\xi\right)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx = \langle f, \widehat{\varphi} \rangle \\
&= \langle \widehat{f}, \varphi \rangle
\end{aligned}$$

其中，最后将f看作缓增分布. 根据定理5.8(局部可积函数到嵌入分布的唯一性)，我们知道$\mathcal{F}_1(f) = \widehat{f}$.
现在假设$f \in L^2(\mathbb{R}^n)$，把在L^2-意义下的Fourier变换记为$\mathcal{F}_2(f)$. 对任意的$k \geqslant 1$，我们令

$$f_k = f \cdot \chi_{|x|\leqslant k} \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$$

那么，根据L^2的Fourier变换的定义，在L^2意义下

$$\mathcal{F}_2(f) = \lim_{k\to\infty} \mathcal{F}_1(f_k)$$

所以，分布意义下等号也成立. 从而由刚刚得到的结论，在分布意义下

$$\mathcal{F}_2(f) = \lim_{k\to\infty} \widehat{f_k}$$

由于在L^2意义下

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k$$

所以缓增分布意义下等号也成立. 根据定理5.49中Fourier变换的连续性，缓增分布意义下

$$\widehat{f_k} \longrightarrow \widehat{f}.$$

进而

$$\mathcal{F}_2(f) = \lim_{k\to\infty} \widehat{f}_k = \widehat{f}$$

这就验证了这些Fourier变换的概念是相容的. □

下面计算一些常见函数的Fourier变换：

例5.51. Dirac函数δ_0. 我们有

$$\widehat{\delta_0} = 1.$$

假设$\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，那么，

$$\langle \widehat{\delta_0}, \varphi \rangle = \langle \delta_0, \widehat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

这就完成了计算.
对任意的$a \in \mathbb{R}^n$，任意的多重指标α，我们有

$$\widehat{\partial^\alpha \delta_a} = (2\pi i \xi)^\alpha e^{-2\pi i a\cdot\xi}, \quad \widehat{x^\alpha} = (2\pi i \xi)^\alpha \delta_0$$

特别地，

$$\widehat{1} = \delta_0$$

这些计算留作练习.

计算Fourier变换经常需要以下几个观察：

命题5.52.(重要) 设$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$是缓增的分布. 我们有：

(1) 给定可逆的$n \times n$的实系数矩阵A，我们把它看作是$\mathbb{R}^n$到自身的线性变换，那么，A^*u也是缓增的分布并且

$$\widehat{A^*u} = |\det(A)|^{-1} \left({}^t A^{-1}\right)^* \widehat{u}$$

通常，我们把这个公式写作

$$\widehat{u(Ax)}(\xi) = |\det(A)|^{-1} \widehat{u}\left(A^{-T}\xi\right)$$

(2) 如果u是次数为s的齐次分布，那么，$\widehat{u}$是次数为$-s-n$的齐次分布.(齐次分布定义想必大家自己会推了)

(3) 如果u是奇分布，即满足$\check{u} = u$，那么$\widehat{u}$也是；如果u是偶分布，即满足$\check{u} = -u$，那么$\widehat{u}$也是.

(4) 如果u是旋转对称的，即对任意的$A \in \mathrm{SO}_n$，

$$A^*u = u$$

那么，$\widehat{u}$是旋转对称的.

证明. 留作练习.

例5.53. Dirac函数δ_0是次数为$-n$的齐次分布，因为它的Fourier变换1是次数为0的齐次分布.

例5.54. 计算p.v.$\frac{1}{x}$的Fourier变换：

$$(\text{p.v.}\frac{1}{x})\widehat{\ } = -i \cdot \operatorname{sgn}(\xi)$$

证要. 注意到

$$x \cdot \text{p.v.}\frac{1}{x} = 1.$$

以及p.v.$\frac{1}{x}$是一个奇分布. □

例5.55. 设$n \geqslant 3$，我们考虑$\mathbb{R}^n$上Laplace算子Δ的一个基本解u

$$\Delta u = \delta_0.$$

上一节我们给出了Δ的基本解，但如何能够合理地动手构造基本解？

作一个合理预设：u是缓增分布. 那么，就如我们之前处理PDE一样，利用Fourier变换在频率空间中有

$$-(2\pi|\xi|)^2\widehat{u} = 1$$

于是

$$\widehat{u}(\xi) = -\frac{1}{(2\pi|\xi|)^2}.$$

我们注意到$n \geqslant 3$，所以$|\xi|^{-2}$局部可积，从而定义了一个分布. 进一步可以将其写成

$$\frac{1}{(2\pi|\xi|)^2} = \frac{1}{(2\pi|\xi|)^2}\chi_{|\xi|\leqslant 1}(\xi) + \frac{1}{(2\pi|\xi|)^2}\chi_{|\xi|>1}(\xi).$$

分解为一个紧支分布与L^∞函数的和，从而是缓增分布.

上面给出了$\widehat{u}$的一个可能的解(其他的解与u相差一个复系数多项式，见下一节的缓增调和分布). 为了在物理空间中表达u，我们要计算$-\dfrac{1}{|\xi|^2}$的Fourier逆变换. 我们注意到这是一个旋转对称的次数为-2的齐次分布，从而，它的Fourier逆变换是旋转对称的次数为$-n+2$的齐次分布. 通过这个观察，一个合理的猜测自然是

$$u = \frac{C}{|x|^{n-2}}.$$

我们就回到了上一节得到的基本解形式. 通过类似的计算我们可以得到待定的系数C，即得到

$$E = \frac{|x|^{2-n}}{(2-n)\left|\mathbf{S}^{n-1}\right|}.$$

是Lapalace算子的基本解.

下面的**球面测度**的Fourier变换很重要，在求解波动方程时将有应用.

例5.56. 令$d\sigma_R$为$\mathbb{R}^3$上中心在原点半径为R的球面$\mathbf{S}_R^2$上的球面测度，其中$R > 0$. 我们(已经见过)可以把它视作是一个0阶的分布：对任意的$\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$，我们令

$$\langle d\sigma_R, \varphi\rangle = \int_{\mathbf{S}_R^2} \varphi\big|_{\mathbf{S}_R^2} d\sigma_R.$$

这是紧支分布，计算它的Fourier变换$\widehat{d\sigma_R}(\xi)$：

这是一个关于ξ的光滑函数. 由于分布$d\sigma_R$旋转对称，所以$\widehat{d\sigma_R}(\xi)$也是旋转对称的，$\widehat{d\sigma_R}(\xi)$是只与$|\xi|$相关的函数. 所以只要做如下计算：

$$\begin{aligned}
\widehat{d\sigma_R}(0,0,|\xi|) &= \langle d\sigma_R, e^{-2\pi i(x,y,z)\cdot(0,0,|\xi|)}\rangle \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\pi} e^{-2\pi i|\xi|R\cos\vartheta} R^2 \sin\vartheta d\vartheta\right) d\phi \\
&= 2R^2\pi \int_0^{\pi} e^{-2\pi i|\xi|R\cos\vartheta} \sin\vartheta d\vartheta \\
&= 2R^2\pi \frac{e^{-2\pi iR|\xi|t}}{-2\pi iR|\xi|}\Big|_{-1}^{1}
\end{aligned}$$

最终得到

$$\frac{\widehat{d\sigma_{\mathbf{S}_R^2}}}{2R} = \frac{\sin(2\pi R|\xi|)}{|\xi|}$$

我们反复强调过，Fourier分析中物理空间的衰减$\sim$频率空间的光滑性. 这一观点在分布意义下的一个体现：

定理5.57. 设$u \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$(自然在无穷远处迅速衰减)，则$\widehat{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n_\xi)$是光滑函数并且

$$\widehat{u}(\xi) = \left\langle u, e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right\rangle.$$

证明. 选取截断函数$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$来记住$u$的紧支集，其中$\chi|_{\mathrm{supp}(u)} \equiv 1$. 根据定义以及分布与积分可交换的命题，

$$\begin{aligned}
&\langle \widehat{u}, \varphi\rangle = \langle u, \widehat{\varphi}\rangle \\
=&\langle \chi\cdot u, \widehat{\varphi}\rangle = \langle u, \chi\widehat{\varphi}\rangle \\
=&\left\langle u, \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\chi(\xi)\varphi(x)dx\right\rangle \\
=&\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle u(\xi), e^{-2\pi i x\cdot\xi}\chi(\xi)\right\rangle\varphi(x)dx \\
=&\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle u(x), e^{-2\pi i x\cdot\xi}\chi(x)\right\rangle\varphi(\xi)d\xi \\
=&\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle u(x), e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right\rangle\varphi(\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

将ξ视为参数，则

$$\widehat{u}(\xi) = \left\langle u, \chi(x) e^{-2\pi i x\cdot\xi} \right\rangle.$$

所以，函数$\widehat{u}(\xi)$光滑性可以利用对分布与求导数可交换的命题立即得到. □

我们再来研究$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$上的卷积运算. 为此先考虑在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$上的卷积.

定理5.58. 任意给定紧支分布$c \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$. 则

(1) 对任意$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，我们有

$$\varphi * c \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

进一步，存在正整数q(可能依赖于c)，使得对于任何非负整数p，都存在正常数C_p，使得对任意$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\|\varphi * c\|_{p,S} \leqslant C_p \|\varphi\|_{p+q,S}$$

(2) 对每个Schwartz函数$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$\widehat{\varphi * c}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{c}(\xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

注. 在下一节关于紧支分布的结构定理部分，我们还会证明$\widehat{c}(\xi)$的增长被一个多项式控制.
证要. 定理5.30指出如果f是光滑函数，那么$f * c$是光滑函数并且可以表达为

$$(f * c)(x) = \langle c, f(x - \cdot)\rangle.$$

所以，对于$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$(\varphi * c)(x) = \langle c(y), \varphi(y - x)\rangle.$$

从而，利用分布与求导数可交换，对任意多重指标α和β

$$(x^\alpha \partial^\beta \varphi * c)(x) = \left\langle c(y), x^\alpha \left(\partial^\beta \varphi\right)(y - x)\right\rangle$$

由于c是紧支分布，我们令$K = \mathrm{supp}(u)$)；u是有限阶的分布，阶记作q. 之后的估计留作习题.

现在证明(2). 选取截断函数$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得$\chi\big|_{\mathrm{supp}(c)} \equiv 1$. 我们先假定$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$(从

而，如下进行的分布与积分号可以交换). 我们有

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi * c}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi * c(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \left\langle c(y), \varphi(y-x) \right\rangle dx \\
&= \left\langle c(y), \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(y-x) dx \right\rangle \\
&= \left\langle c(y), \chi(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(y-x) dx \right\rangle \\
&= \left\langle c(y), \chi(y) e^{-2\pi i y\cdot\xi} \widehat{\varphi}(\xi) \right\rangle \\
&= \left\langle c(y), \chi(y) e^{-2\pi i y\cdot\xi} \right\rangle \widehat{\varphi}(\xi) \\
&= \left\langle c(y), e^{-2\pi i y\cdot\xi} \right\rangle \widehat{\varphi}(\xi) \\
&= \widehat{c}(\xi) \widehat{\varphi}(\xi)
\end{aligned}$$

对于一般情形，在$\mathcal{S}$拓扑下令$\varphi_k \to \varphi$，其中$\{\varphi_k\}_{k\geqslant 1} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. 根据1)的证明，对任意的非负整数$p$，我们有

$$\|\varphi * c - \varphi_k * c\|_{p,S} \leqslant C_p \|\varphi - \varphi_k\|_{p+q,S}$$

从而$\mathcal{S}$拓扑下

$$\varphi_k * c \to \varphi * c,$$

从而根据Fourier变换的连续性，$\mathcal{S}$拓扑下

$$\widehat{\varphi_k * c}(\xi) = \widehat{\varphi_k}(\xi)\widehat{c}(\xi) \to \widehat{\varphi * c}(\xi).$$

另外在$\mathcal{S}$拓扑下还有$\widehat{\varphi_k}(\xi)\widehat{c}(\xi) \to \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{c}(\xi)$(因为$\widehat{c}$是多项式增长的)，定理证毕. □

更进一步有缓增分布与紧支分布的卷积：

定理5.59. 对任意的$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，$c \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$，我们有$u * c \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，即

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{*} \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), \quad (u, c) \mapsto u * c.$$

进一步，我们还有

$$\widehat{u * c} = \widehat{c} \cdot \widehat{u},$$

正如前面提及的，$\widehat{c}$是多项式增长的光滑函数.

证明. 首先证明$u * c \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. 对任意的$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，存在常数$C$和$p$，使得有

$$|\langle u * c, \varphi \rangle| = |\langle u, \check{c} * \varphi \rangle| \leqslant C \|\check{c} * \varphi\|_{p,S}$$

由上一个定理，我们有

$$|\langle u * c, \varphi \rangle| \leqslant C' \|\varphi\|_{p+q,S}.$$

所以， $u * c$是缓增的分布.

下面计算$u*c$的Fourier变换：对任意给定的$\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，那么$\psi=\widehat{\varphi}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. 从而，

$$\begin{aligned}\langle\widehat{u*c},\psi\rangle&=\langle u*c,\widehat{\psi}\rangle=\langle u*c,\check{\varphi}\rangle\\&=\langle u,\check{c}*\check{\varphi}\rangle=\langle u,\widehat{\widehat{c*\varphi}}\rangle\\&=\langle\widehat{u},\widehat{c*\varphi}\rangle=\langle\widehat{u},\widehat{c}\widehat{\varphi}\rangle\\&=\langle\widehat{c}\cdot\widehat{u},\psi\rangle\end{aligned}$$

利用Fourier变换是$\mathcal{S}$连续同构和$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$稠密，$\mathcal{F}(\mathcal{D})\ni\forall\psi$在$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$中稠密，进而定理证毕. □

最后我们插播一个有趣的话题. 笔者不懂多复分析，当下只能限制在$\mathbb{R}^1$上讨论. 定理5.57指出了紧支分布的Fourier变换，实际上我们还能对其支集(衰减性)指出

定理5.60.(Paley-Weiner-Schwartz) 设非零的紧支分布u，则$\widehat{u}$非紧支.

证明. 限制在$x\in\mathbb{R}$上讨论. 回顾定理5.57，我们可以将$\widehat{u}(\xi)=\left\langle u,e^{-2\pi ix\cdot\xi}\right\rangle$延拓至复平面$\mathbb{C}$：

$$\widehat{u}(z):=\left\langle u,e^{-2\pi ix\cdot z}\right\rangle,\forall z\in\mathbb{C}$$

上式称为**Fourier-Laplace变换**. 与定理5.57的证明类似，$\widehat{u}(z)\in C^\infty(\mathbb{C})$. 进一步，根据分布与导数可交换可知$\widehat{u}(z)$满足Cauchy-Riemann方程(导数转移到了$e^{-2\pi ix\cdot z}$上)，从而我们得到一个比定理结论更强的结果：$\widehat{u}(z)$是$\mathbb{C}$上的整函数. 非零整函数自然非紧支，否则与零点孤立性矛盾. □

这个定理可以用各种眼光去研究，每个角度都可以得到相当深刻的见解：

(1) P-W-S定理是**不确定性原理**的一种表述. 在量子力学中物质/粒子的数学本质是满足归一化条件的波函数Ψ——物质的概率分布(“分布”(distribution)一词来源似乎就与此有关，而且最著名的分布δ也源于量子力学，未经考证hhh)，如果波函数在物理空间x上的不确定性(Ψ的支集)越小，那么在频率空间ξ的不确定性($\widehat{\Psi}$，至于它和动量等物理量怎么联系笔者就不懂了)越大. 最直接的例子就是Dirac分布$\Psi=\delta_0$(注意它满足归一化条件；单点支撑意味着粒子的位置完全确定)的Fourier变换是$1_{\mathbb{R}}$(频率完全不确定). 这个观点不仅在物理，而且在调和分析中都得到了充分的发展，成为了相当成熟的分析技术.

(2)实际上P-W-S定理有强大得多的版本：u的紧支半径以及阶(分布的奇异性)与整函数$|\widehat{u}(z)|$的增长速度有充要性联系，具体请参考Stein的*Complex Analysis*第4章或Hörmander的*The Analysis of Linear Partial Differential Operators*第7章. 所以P-W-S定理同样也是物理(频率)光滑~频率(物理)衰减原理的体现，但更进一步，因为这暗示了可以通过Fourier变换$\widehat{u}$沿某一方向(1维)的非衰减性来研究u在该方向上的非正则性(奇点的传播通过Fourier变换得到定量的刻画)，这个想法发展下去就来到微局部分析这个大领域了.

...

紧支/点支/调和的结构刻画；平移不变算子

利用Fourier变换可以给出$\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$一个漂亮的刻画：

定理5.61.(紧支分布的结构定理) 对$c \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$，存在有限多个多重指标$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$和有限多个紧支撑连续函数$f_{\alpha_1}(x), \cdots, f_{\alpha_m}(x)$，使得

$$c = \sum_{k \leqslant m} \partial^{\alpha_k} f_{\alpha_k}.$$

证明. 我们选取截断函数$\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$，使得$\chi|_{\mathrm{supp}(c)} \equiv 1$. 那么，我们有

$$\widehat{c}(\xi) = \left\langle c, e^{-2\pi i x \cdot \xi} \right\rangle = \left\langle c, \chi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \right\rangle.$$

由于c的阶是有限的(记作是p)，所有存在常数C，使得

$$\begin{aligned} |\widehat{c}(\xi)| \leqslant & C_\chi \left\| \chi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \right\|_p \\ = & C_\chi \sup_{|\alpha| \leqslant p} \| \partial^\alpha \big(\chi(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} \big) \|_{L_x^\infty} \\ \leqslant & C_\chi (1 + (2\pi |\xi|))^p \sup_{|\beta| \leqslant |\alpha|} \| \partial^\beta \chi \|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

所以，只要选取$N \geqslant (p+n+1)/2$，我们就有

$$F(\xi) = \frac{1}{(1 + (2\pi |\xi|)^2)^N} \widehat{c}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

根据L^1的Fourier变换理论，$\underline{\mathcal{F}^{-1} F \in C_0(\mathbb{R}^n) \in C_0 \mathbb{R}^n}$. 根据之前证明的公式我们得到

$$(1 - \Delta)^N \left(\mathcal{F}^{-1} F \right) = c.$$

从而，

$$\chi(x) (1 - \Delta)^N \left(\mathcal{F}^{-1} F \right) = c.$$

再利用$\chi \cdot \partial_j = \partial_j(\chi \cdot) - \partial_j \chi$把$\chi$及其导数全部放到求导运算里面，定理证毕. □

进一步我们可以刻画单点支撑的分布(称为点支分布). 这类分布相当常见，特别是涉及到奇点(奇异积分). 它的结构也不出直觉所料. 不过证明与前面大不相同，因为很难选择足够精细的试验函数作$\{0\}$的截断，所以需另辟蹊径.

定理5.62.(点支分布的结构定理) 设$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，如果

$$\mathrm{supp}(u) = \{0\},$$

则存在有限多个多重指标α_k和复数C_{α_k}，其中$k = 1, \cdots, N$，使得

$$u = \sum_{k=1}^N C_{\alpha_k} \cdot \partial^{\alpha_k} (\delta_0)$$

证要. 引入平坦的概念：给定非空的闭集$F \subset \mathbb{R}^n$，$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$是试验函数. 如果存在非负整数$p$，使得对每个满足$|\alpha| \leqslant p$的多重指标$\alpha$，我们都有

$$D^\alpha \varphi\big|_F = 0,$$

我们就说试验函数φ在F上是 **p-次平坦的**. 我们不加证明地给出以下技术性结论：

引理5.63.(平坦性引理) 给定阶为p的分布$u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$，如果试验函数$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$在$\mathrm{supp}(u)$上$p$-次平坦，那么

$$\langle u, \varphi \rangle = 0.$$

由于u的支集是紧的，我们可假设其阶为$p \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. 我们选取有紧支集的函数$\chi$，使得它在包含0的一个开集上为1. 我们用类似于多项式的近试验函数$\left(\sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha\right) \chi(x)$来逼近$\varphi$，即定义

$$r(x) = \varphi(x) - \left(\sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha\right) \chi(x).$$

显然$r(x)$是试验函数. 由于$\left(\sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} x^\alpha\right) \chi(x)$和$\varphi(x)$在0处一直到$p$阶导数是相等的，所以$r(x)$在$\{0\}$上$p$-阶平坦

$$\langle u, r \rangle = 0.$$

从而

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant p} \frac{\partial^\alpha \varphi(0)}{\alpha!} \langle u, x^\alpha \chi \rangle,$$

所以，只要取$C_\alpha = (-1)^{|\alpha|} \frac{\langle u, x^\alpha \chi \rangle}{\alpha!}$，我们就有

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant p} C_\alpha \langle \partial^\alpha(\delta_0), \varphi \rangle.$$

至此完成了点支分布的刻画. □

作为点支分布的第一个应用，我们接着刻画$\mathbb{R}^n$上的**调和**缓增分布，即$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$并且满足

$$\Delta u = 0$$

定理5.64.(调和缓增分布的结构) 设$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$是调和的缓增分布，则$u$必然是$(x_1, \cdots, x_n)$的多项式函数.
证明. 由于$u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$，所以我们可以对它做Fourier变换. 从而，

$$\Delta u = 0 \quad \Rightarrow \quad -(2\pi|\xi|)^2 \widehat{u} = 0$$

这表明$\mathrm{supp}(\widehat{u}) \subset \{0\}$(请验证，留作练习!)，从而

$$\widehat{u} = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \partial^\alpha \delta_0(\xi)$$

对上式作Fourier逆变换：

$$u = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \left(-2\pi i \xi\right)^\alpha$$

这就得到了要证明的结论. □

注1. $\mathrm{supp}(\widehat{u})$称为$u$的**谱**并记作$\mathrm{spec}(u)$.

注2. 要求u缓增非常重要：在$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$上任何整函数都是调和的，诸如$e^z$它所定义的分布不是缓增的.

注3. 2021年丘赛分析组个人赛笔试Problem.1 即为该定理的推论.

最后我们利用Fourier变换证明一个极其重要同时非常优雅的算子结构定理，往后这个定理还会有更深刻的应用.

定理5.65.(平移不变算子的结构) 设$1 \le p, q \le \infty$，线性算子T是强(p, q)型. 如果T平移不变

$$\tau_h \circ T = T \circ \tau_h, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$$

则存在一个缓增分布K使得

$$Tf = K * f, \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

注. 最典型的平移不变算子可能是常系数偏微分算子了，所以定理一定程度上反映了常系数线性PDE的可解性. 但问题出现在算子本身是否(p, q)有界？我们下一章将重点处理并克服这个困难.

证明. 定理的证明需要两个同样富于启迪的引理.

引理5.66. 在定理5.64的假设下，对$\forall f \in \mathcal{S}$，

$$D^\alpha(Tf) \in L^q, \quad \forall \alpha$$

并满足

$$D^\alpha(Tf) = T(D^\alpha f)$$

引理5.67. 设$f \in L^p(\mathbb{R}^n)$满足

$$D^\alpha f \in L^p, \quad \forall |\alpha| \le n+1$$

则f是一个连续函数(至多在一个零测集上修正后)，并有估计

$$|f(0)| \le C_{n,p} \sum_{|\alpha| \le n+1} \|D^\alpha f\|_q$$

注. 下一章我们会看到，引理5.66是著名的Sobolev嵌入定理的特例. 引理已经初步展现了弱

导数的可积性与分布的常义正则性之间微妙的联系.

回到定理的证明. 设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，则根据上述两个引理，存在函数$F \in C(\mathbb{R}^n)$满足$Tf = F \quad a.e.$并且

$$|F(0)| \leq C_{n,q} \sum_{|\alpha| \leq n+1} \|D^\alpha T f\|_q$$

论证说明了平移不变给Tf赋予了很强的正则性(F连续)，这使得"$a.e.$逐点"定义Tf有了可能：上述估计诱导了一个$\mathcal{S}$上的(取值)线性泛函(注意这里无法得到缓增性)

$$u : \langle u, f \rangle = F(0), \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

请各位自行验证u良定义(事实上F唯一)，留作练习. 进一步计算：

$$\begin{aligned}
|\langle u, f \rangle| \leq & C_{n,q} \sum_{||dn+1} \|D^\alpha T f\|_q \\
\leq & C_{n,q} \sum_{||dn+1} \|T(D^\alpha f)\|_q \\
\leq & C_{n,q} \|T\| \sum_{||dn+1} \|D^\alpha f\|_q \\
\leq & C'_{n,q} \|T\| \|f\|_{n+1,S}
\end{aligned}$$

最后一个不等式请各位验证，留作练习. 所以缓增分布$u \in \mathcal{S}'$. 自然地猜测：对f平移为$\tau_x f$代入即可得到$F(x)$：对$\forall y \in \mathbb{R}^n$

$$(T \circ \tau_x) f(y) = (\tau_x \circ T) f(y) = T f(x+y)$$

设$(T \circ \tau_x) f$的连续化为F_x，根据连续化的唯一性可知

$$\langle u, \tau_x f \rangle = F(x)$$

这样证实了我们的猜测. 然而

$$\langle u, \tau_x f \rangle = \langle u^\vee, \tau_{-x} f^\vee \rangle = u^\vee * f(x)$$

所以在L^q意义下，$Tf = u^\vee * f$. 我们完成了平移不变算子的刻画. □

引理5.66证要. 注意到定理5.16中的平移算子. 由平移不变性证明：任取试验函数φ

$$\int_{\mathbb{R}^n} Tf(x) \cdot \frac{\tau_{tv}\varphi(x) - \varphi(x)}{t} \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \cdot T\left(\frac{\tau_{tv} f - f}{t}\right)(x) \, dx$$

利用

$$\frac{\tau_{tv}\varphi(x) - \varphi(x)}{t} = \int_0^1 \varphi(x + tsv) \, ds$$

和$\varphi, f \in \mathcal{S}$验证控制收敛定理的条件，令$t \to 0$. □

注. 运用定理5.16的差分方法在研究PDE解的正则性大有用处，究其原因是可以利用弱解(分布意义的解)的较低阶导数和可积性质(Lebesgue控制收敛)得到更高阶导数的可积性，比如

引理的结论！更多内容可以参考Jost的PDE教材GTM214.

引理5.67证明. 连续性是局部性质，所以不妨给定截断函数

$$\varphi_R \in \mathcal{D} \ : \mathrm{supp}(\varphi_R) \subset B(0,2R);$$
$$\varphi_R \mid_{B(0,R)} \equiv 1$$

然后对$f \cdot \varphi_R$证明引理的结论即可. 根据L^1的Fourier变换理论，只需<u>证明$\widehat{\varphi_R \cdot f} \in L^1$</u>：(再一次，我们利用Fourier变换将光滑性转化成频率的衰减性！)

$$\begin{aligned}
\left|\widehat{\varphi_R f}(\xi)\right| &\le \frac{C_n}{(1+|\xi|^{n+1})} \cdot \sum_{|\alpha|\le n+1} \left|(2\pi i\xi)^\alpha \widehat{\varphi_R f}(\xi)\right| \\
&\le \frac{C_n}{(1+|\xi|^{n+1})} \cdot \sum_{|\alpha|\le n+1} \|(D^\alpha(\varphi_R f))\widehat{\ }\|_\infty \\
&\le \frac{C_n}{(1+|\xi|^{n+1})} \cdot \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha(\varphi_R f)\|_1 \\
&\le \frac{C_n}{(1+|\xi|^{n+1})} \cdot |B(0,2R)|^{1/q'} \cdot \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha(\varphi_R f)\|_q \\
&\le \frac{C_{n,R}}{(1+|\xi|^{n+1})} \cdot \sum_{|\alpha|\le n+1} \|D^\alpha(f)\|_q \\
&\le \frac{C_{n,R,f}}{(1+|\xi|^{n+1})}
\end{aligned}$$

如此得到$\widehat{\varphi_R \cdot f} \in L^1$. 设其Fourier反演为$f_R \in C(\mathbb{R}^n)$，则在$B(0,R)$上$f = f_R \ a.e. \quad \forall R > 0$. 于是存在$f_\infty \in C$，$f = f_\infty \ a.e.$ 而引理中的估计则是$R = 1$这一特殊情形：

$$f_\infty(0) \le \left\|\widehat{\varphi_1 f}\right\|_1$$

注意这里也要用到连续化的唯一性. □

练习17. 设非平凡T平移不变且强(p,q)型，证明$p \le q$.
提示. 证明以下两个估计：

(1) 对$\forall h \in \mathbb{R}^n$，

$$\|\tau_h \circ Tf + Tf\|_q \le \|T\| \cdot \|\tau_h f + f\|$$

(2) 对$f \in L^q, 1 \le q < \infty$，

$$\lim_{h\to\infty} \|\tau_h f + f\|_p = 2^{1/q} \|f\|_p$$

(这个证明来自Hörmander)

练习18. 证明若T平移不变且(p,q)型，则也是强(q',p')型(Hölder共轭).

最后，借助平移不变算子的结构，我们试图从卷积，进而乘子的角度来刻画平移不变

算子的强(p,q)有界性. 不过在这里深究下去会走得太远，我们限制在强$(2,2)$型的乘子刻画，哪怕这个特例应用也足够广泛，也足以看出定理5.65的强大.

定理5.68. 设平移不变算子T，则T是强$(2,2)$型当且仅当对应的乘子$m_T \in L^\infty$，且

$$\|T\| = \|m_T\|_\infty$$

证明. 如果$m_T \in L^\infty$，根据L^2的Plancherel定理立得T是强(2,2)型，且$\|T\| \le \|m_T\|_\infty$；
反过来，设T强(2,2)型. 定理5.65指出T是卷积型：

$$Tf = u * f, \quad u \in \mathcal{S}'$$

其中$\widehat{u} = m_T$. 所以对任意试验函数$\varphi \in \mathcal{D}$，

$$\begin{aligned}\varphi \cdot \widehat{u} =& (\varphi^\vee * u)\widehat{\ } \\ =& (T\varphi)\widehat{\ }\end{aligned}$$

是L^2函数. 所以取试验函数

$$\begin{aligned}\varphi_R \in \mathcal{D} \ &: \mathrm{supp}(\varphi_R) \subset B(0,2R); \\ &\varphi_R \mid_{B(0,R)} \equiv 1\end{aligned}$$

于是试验得出$u \in L^2(B(0,R)), \quad \forall R > 0$，进而$u$局部平方可积. 对任意$f \in L_c^\infty$，$f\widehat{u} \in L^2$，再运用Plancherel定理：

$$\begin{aligned}\|f\widehat{u}\|_2 &\le \|T(f^\vee)\|_2 \\ &\le \|T\| \cdot \|f\|_2\end{aligned}$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\|T\|^2 - |\widehat{u}(x)|^2) \cdot |f(x)|^2 \, dx \ge 0$$

选取恰当的f并运用Lebesgue微分定理(我们在第4章已经证明了，注意它对局部可积函数都成立)即可得到

$$|\widehat{u}(x)| \le \|T\| \quad a.e.$$

所以$\widehat{u} \in L^\infty$(上面这一步是分析学中常用的套路). 结合上一步的结论可知$\|T\| = \|m_T\|_\infty$. □

下一章我们还会用到这个刻画. 关于这节所有命题的证明以及更进一步的拓展内容请参考GTM249，即Grafakos的*Classical Fourier Analysis*第2章第5节.

热/波方程的基本解，初值问题及物理意义

这一节我们将运用Fourier变换在$\mathbb{R}^n$上求解两个经典PDE：热方程和波动方程. 这里应当提醒一句：PDE的解和解的定义域的性质密切联系；这里为了应用Fourier变换，我们把时空设置$\{t \ge 0\} \times \mathbb{R}^n$上. 在前面我们已经得知求解PDE等价于求解其对应的偏微分算子的基本解，并成功用Fourier变换推导出Δ的基本解. 而这里的两个方程多出了一个关于系统演

化的时间变量t，如果直接对(t,x)作变换，就破坏了Δ原有的对称性. 所以我们引入“部分”Fourier变换：

考虑函数$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$，其中用$t \in \mathbb{R}^m$表示前面的$m$个变量，$x \in \mathbb{R}^n$表示前面的$n$个变量，我们可以考虑只对后面$n$个变量的Fourier变换(分离变量)：

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(\varphi)(t,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(t,x)dx.$$

为方便起见，把这个变换直接记做$\widehat{\varphi}(t,\xi)$. 类似地，定义对后面n个变量的Fourier反演：

$$\mathcal{F}^{-1}_{\xi\to x}(\psi(t,\xi))(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\psi(t,\xi)d\xi.$$

注意到$\mathcal{F}_{x\to\xi}$把$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$上的Schwartz函数映为$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$上的Schwartz函数，即

$$\mathcal{F}_{x\to\xi} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^m_t \times \mathbb{R}^n_x) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^m_t \times \mathbb{R}^n_x).$$

这是一个连续线性同构，证明留作练习.

根据$\mathcal{F}_{x\to\xi}$在Schwartz函数上的作用，我们就可以定义它在缓增分布上的作用：

$$\mathcal{F}_{x\to\xi} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m_t \times \mathbb{R}^n_x) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m_t \times \mathbb{R}^n_x), \quad u \mapsto \mathcal{F}_{x\to\xi}(u)$$

其中，对于任意的$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$

$$\langle \mathcal{F}_{x\to\xi}(u), \varphi\rangle = \langle u, \mathcal{F}_{x\to\xi}(\varphi)\rangle$$

这同样是连续线性同构.

为研究基本解，我们做点计算：考虑$\delta_{0,0} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m_t \times \mathbb{R}^n_x)$. 按照定义，我们有

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_{x\to\xi}(\delta_{0,0}), \varphi\rangle &= \langle \delta_{0,0}, \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(t,x)dx\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(t,x)dx\Big|_{(t,\xi)=(0,0)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(0,x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \delta_{t=0}, \varphi(t,x)\rangle dx
\end{aligned}$$

采用张量积的记号，我们有

$$\mathcal{F}_{x\to\xi}(\delta_{0,0})(t,\xi) = \delta_{t=0} \otimes 1_\xi$$

热方程

我们首先推导**热算子**$(\partial_t - \Delta)$的基本解：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta\right)E(x,t) = \delta_{0,0}$$

我们做如下的**预设**：$E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$. 对$x$变量做Fourier变换就有

$$\left(\partial_t + 4\pi^2|\xi|^2\right)\widehat{E}(t,\xi) = \delta_{t=0}\otimes 1_\xi \tag{a}$$

问题变成关于变量t求解$\widehat{E}(t,\xi)$的ODE(因为Fourier变换将x的偏微分算子变成了关于“参数”ξ的乘子). 注意到，右边分布的支集落在一个超平面上：

$$\mathrm{supp}(\delta_{t=0}\otimes 1_\xi) \subset \left\{(t,\xi)\middle| t=0\right\}$$

所以，当$t\neq 0$，对于给定$\forall\xi\in\mathbb{R}^n$，ODE(a)的解为

$$c(\xi)e^{-(2\pi|\xi|)^2\cdot t}$$

$c(\xi)$待定. 为了在$t=0$处得到关于t的Dirac分布，根据例5.14关于Heaviside函数$H(t)$导数的计算，我们很容易猜测

$$c(\xi)e^{-(2\pi|\xi|)^2\cdot t}\cdot H(t)$$

满足要求(为什么选择乘上$H(t)$？考虑类似分离变量，乘积求导公式将把导数分配到每个单项上). 现在计算热算子的Fourier变换在这个分布上的作用：

$$\left(\partial_t + (2\pi|\xi|)^2\right)\left(c(\xi)e^{-(2\pi|\xi|)^2\cdot t}H(t)\right) = c(\xi)e^{-(2\pi|\xi|)^2\cdot t}\delta_{t=0} = \delta_{t=0}\otimes c(\xi).$$

因此这的确是我们所要的，只要取$c(\xi)\equiv 1$即可. 综上所述，

$$\widehat{E}(t,\xi) = H(t)e^{-\pi\cdot(\sqrt{4\pi t}|\xi|)^2}$$

对ξ做Fourier反演，由命题3.19和命题3.18我们得到热算子的基本解

$$E(t,x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

$E(t,x)$自然符合预设，正是我们要找的基本解. 注意到$E_t(x)=E_t(x)$就是在第3章练习13处给出的**热核**，(准确来说，这是$\mathbb{R}^n$上的热核；一般区域上热核的构造需要用Hilbert空间上自伴紧算子的理论研究Laplace算子的谱，这当然超出我们的话题，于品老师的数学分析(?)讲义第3卷第77-82节是这方面极好的入门材料). 特别地，注意到分布意义下

$$\lim_{t\to 0_+} E_t(x) = \delta_0(x)$$

如此$\mathbb{R}^n$上热方程的**Cauchy初值问题**(这里要求系统的**过去**为零，即$u(t,x)=0,\quad t<0$. 这是处于物理因果性的考虑，不过至少基本解E满足这个条件)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)u(x,t)=0,\quad \forall (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$$
$$u(0,x)=f(x),\quad f\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$$

有一个解(对x变量卷积)

$$u_0(t,x) = (E_t * f)(x),\quad \forall t\geq 0$$

(这里把分布写成函数-变量形式仅仅为了让各位看清其中的变量关系)

我们换个更加普适的角度(即不大依赖E的具体解析结构)来看待这个解：假设热方程有解$u(t,x), \quad t \geq 0$,那么初值相当于用$\delta_{t=0}$“乘以”$u(x,t)$，所以类似推导$E(t,x)$的想法，我们用$H(t)u(t,x)$去试验(注意这个分布在$t<0$也有意义)：

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)(H(t)u(t,x)) \\
=&\delta_0(t)\cdot u(t,x)+H(t)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)u(t,x) \\
=&\delta_0(t)\otimes f(x)
\end{aligned}
$$

于是Cauchy问题转化为一个微分算子型的方程：

$$
\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)u=\delta_0(t)\otimes f(x)
$$

根据之前Laplace算子的基本解一节课我们知道方程在$\mathcal{D}'(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)$上有唯一的解，而$t \geq 0$时$H(t)u(t,x)=u(t,x)$. 所以$u_0(t,x)=E_t * f(x)$是Cauchy问题分布意义下<u>唯一</u>的解！(这里希望各位与之前一样处理Poisson方程一样自行分析$u(t,x)$的正则性与渐进性质)

值得注意的是：热核$E(t,x)$在$t>0$上<u>恒正</u>. 从而得到两个有趣的结论：(请验证，留作练习)

(1) **最大值原理**：对于Cauchy问题的解$u(t,x)$，

$$
\sup_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^n} u(t,x)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)
$$

$$
\sup_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^n} u(t,x)=\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)
$$

即最值只能在边界(初值)上取得. 这很符合物理事实：在没有外加热源情况下热传导总是趋向于中和. 这同时也重新导出热方程Cauchy问题解的唯一性.

不过直接从热方程的结构入手在物理空间上也能证明最大值原理(在假定u光滑时是数学分析习题；如果仅假设u是弱解，可以参考Brezis的*Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*第8.5节，第10.2节介绍的Stampacchia截断技术). 我们之前也运用过热传导的物理事实“证明”过热核的正性，所以我们有以下自然的猜测：

练习19. 在假设最大模原理成立的情况下，证明基本解(热核)$E(t,x)$一定恒正.
注. 显然这个命题可以延伸到常系数PDE(根据平移不变算子的结构，解具有卷积形式)，所以是一个相当普适的技术：在物理空间上推导最大模原理，再得到核的正性.

(2) 初值恒非负的情况下，无论t和$\mathrm{supp} f$多小，方程的解都不会在无穷远处消失，这当然和热传播速度有限的物理事实相违背. 这只能说明描述热传导的物理定律不够精确了2333，并不妨碍热方程作为最基本的“抛物方程”在PDE领域的基础地位.

波动方程

我们考虑定义在$\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n$上的**波算子**

$$\square = \partial_t^2 - \Delta$$

仍然预设我们基本解$W \in \mathcal{S}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$，因此

$$\square W = \delta_{0,0} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (2\pi|\xi|)^2 \right) \widehat{W}(t, \xi) = \delta_{t=0} \otimes 1_{\xi}.$$

这是一个二阶线性ODE. 同理当$t > 0$，对于固定的$\xi \in \mathbb{R}^n$，通解形如

$$a(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + b(\xi) \sin(2\pi|\xi|t)$$

与热方程的情况相似，对$\widehat{W}(t, \xi)$的形状先做出如下的猜测：

$$\widehat{W}(t, \xi) = H(t) \left(a(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) + b(\xi) \sin(2\pi|\xi|t) \right).$$

所以欲代入波动方程中：

$$\begin{aligned}
\partial_t \widehat{W}(t, \xi) =& H(t) \left(-a(\xi)|\xi| \sin(t|\xi|) + b(\xi)|\xi| \cos(t|\xi|) \right) + \delta_{t=0} \left(a(\xi) \cos(t|\xi|) + b(\xi) \sin(t|\xi|) \right) \\
=& H(t) \cdot 2\pi|\xi| \left(-a(\xi) \sin(2\pi|\xi|t) + b(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) \right) \\
&+ \delta_{t=0} \otimes a(\xi)
\end{aligned}$$

如果再对这个式子求导数，最后一项可能会贡献出$\delta'_{t=0}$导致不满足基本解的公式. 所以我们进一步假设$a(\xi) \equiv 0$. 据此有

$$\begin{aligned}
\widehat{W}(t, \xi) &= H(t) b(\xi) \sin(2\pi|\xi|t), \\
\partial_t \widehat{W}(t, \xi) &= H(t) \cdot 2\pi|\xi| b(\xi) \cos(2\pi|\xi|t).
\end{aligned}$$

从而，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (2\pi|\xi|)^2 \right) \widehat{W}(t, \xi) =& \delta_{t=0} \cdot 2\pi|\xi| b(\xi) \cos(2\pi|\xi|t) \\
=& \delta_{t=0} \otimes 2\pi|\xi| b(\xi)
\end{aligned}$$

据此，我们令$b(\xi) = 1/(2\pi|\xi|)$：

$$\widehat{W}(t, \xi) = H(t) \frac{\sin(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$$

当$\underline{n = 3}$，我们已经在例5.56计算了球面测度的Fourier变换

$$\frac{\widehat{d\sigma_{\mathbb{S}_R^2}}}{2R} = \frac{\sin(2\pi R|\xi|)}{|\xi|}.$$

所以，当$n=3$时，我们有

$$W(t,x)=H(t)\frac{d\sigma_{\mathrm{S}_t^2}(x)}{4\pi t}\in\mathcal{S}'$$

关于基本解的基础性质一样可以运用于此.

进一步我们考虑波动方程的**Cauchy初值问题**(同样要求过去为零)

$$\begin{aligned}&\Box u(x,t)=0,\quad \forall t>0,x\in\mathbb{R}^n\\&u\mid_{t=0}=u_0(x),\quad u_0\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\\&\partial_t u\mid_{t=0}=u_1(x),\quad u_1\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)\end{aligned}$$

假设解是$u(t,x)$. 同样地，用解的截断$H(t)u(t,x)$试验：

$$\begin{aligned}\Box(H(t)u(t,x))=&\partial_t(\delta_{t=0}\cdot u(t,x)+H(t)\partial_t u(t,x))-H(t)\Delta u\\=&\partial_t(\delta_{t=0}\otimes u_0(x))+\delta_{t=0}\cdot\partial_t u(t,x)+H(t)\cdot\Box u(t,x)\\=&\partial_t(\delta_{t=0}\cdot u_0(x))+\delta_{t=0}\cdot u_1(x)\end{aligned}$$

右式满足过去为零. 根据基本解的性质(参考前面的热方程)

$$H(t)u(t,x)=\partial_t(W*[\delta_{t=0}\cdot u_0(x)])+W*(\delta_{t=0}\cdot u_1(x))$$

所以当$t\geq 0$时

$$u(t,x)=\partial_t(W*[\delta_{t=0}\cdot u_0(x)])+W*(\delta_{t=0}\cdot u_1(x))$$

下面计算$u(t,x),\quad t\geq 0$的显式. 简化起见，下面用$v\in\mathcal{E}'$代替u_0,u_1.

$$\begin{aligned}W*(\delta_{t=0}v(x))&=\langle W,\delta_0(t-\cdot)v(x-\cdot)\rangle\\&=\left\langle\frac{d\sigma_{\mathrm{S}_t^2}(\cdot)}{4\pi t},v(x-\cdot)\right\rangle\\&=\frac{1}{4\pi t}\cdot d\sigma_{\mathrm{S}_t^2}*v(x)\end{aligned}$$

从上式可以看出，$u(t,x)$的值只取决于u_0,u_1在球面$\{(0,y):\ \|x-y\|=t\}$(即点(t,x)的**倒向光锥**与初值平面$\{t=0\}$的截面)上的限制，这能得到相当丰富的物理性质，例如

(1) **Huygens原理**：$\mathbb{R}^3$上的波在每一点处以球面波向前传播(于是在时空中形成一个**光锥**)，并满足线性叠加性. 这也是我们猜测球面测度是基本解的物理直觉.

(2) **波速有限原理**：如果初值条件紧支，则对$\forall t\geq 0$，$u_t(x)$在$\mathbb{R}^3$上紧支. 实际上$\{u(t,x)\}_{t\geq 0}$包含在以初值条件的支集按Huygens原理形成的光锥之内.

以上结论对$u_0,u_1\in\mathcal{E}'$成立，如果加以正则性的限制，比如u_0,u_1都是球面可积，那就有

积分表达式

$$
\begin{aligned}
u(t,x) =& t\int_{\mathbb{S}^2} u_1(x-t\theta)\,\frac{d\sigma_{\mathbb{S}^2}(\theta)}{4\pi} \\
&+\partial_t (t\int_{\mathbb{S}^2} u_0(x-t\theta)\,\frac{d\sigma_{\mathbb{S}^2}(\theta)}{4\pi})
\end{aligned}
$$

上式即为3维波动方程著名的**Kirchhoff公式**.

对于$n=1,2$乃至n分别为奇数，偶数的情形，这里篇幅所限无法一一叙述. 笔者建议各位可以自行查阅Stein的Fourier分析导论相关内容以及一些物理资料，尝试自己推导$n=1,2$情形下各自的解公式(比如d'Alembert公式和Poisson公式，descending method等等).

最后我们必须提波动方程的一个重要例子：真空,无源情形的**Maxwell方程组**

$$
\begin{aligned}
\operatorname{div}\mathrm{E} &= \nabla\cdot\mathrm{E} = 0 && (1)\\
\operatorname{div}\mathrm{B} &= \nabla\cdot\mathrm{B} = 0 && (2)\\
\operatorname{rot}\mathrm{E} &= \nabla\times\mathrm{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t} && (3)\\
\operatorname{rot}\mathrm{B} &= \nabla\times\mathrm{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} && (4)
\end{aligned}
$$

其中$E(x,t),B(x,t)$分别是平直时空$\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}_t$的电场和磁场(即：向量值函数). 前两条方程保证系统满足守恒律. 而后两条描述电磁感应的方程是Maxwell方程组的关键. (4)式对t求导并代入(3)式：

$$
\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathrm{E}}{\partial t^2} = -\mathrm{rot\ rot\ E}
$$

而我们有公式

$$
\mathrm{rot\ rot} = \mathrm{grad\ div}\ -\Delta
$$

利用(1)式可得

$$
(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta)\mathrm{E}=0
$$

因此，电场E的每个空间分量均满足波动方程，且波速即为光速c！磁场同理也是波动形式. Maxwell据此做出了电磁波的假设以及光是电磁波的惊人预言，远在实验观测之前，不可不谓神奇.

“……只是希望读者注意，在科学上对什么是理论的、抽象的，什么又是有用的、实在的，不要持独断的态度，归根结底，不必争论什么是“纯粹的”，什么是“应用”的以及哪一个更好. 真正的问题在于思想和洞察力. 有了这些就会有好的数学.”

——苏竞存，*流形的拓扑学*[1]

[1]1980年秋，苏竞存先生应武汉大学数学系的邀请，在珞珈山上讲授一学期的拓扑学课程，并留下一份如小说般娓娓道来、引人入胜的讲义*流形的拓扑学*，上文关于Maxwell方程组的内容即采用该书的讲法. 引言摘自书中p486苏先生对Maxwell相关工作的评论，与诸位共勉.

6 微分算子，奇异积分与Sobolev空间

来到最后一章，笔者计划综合前文积累的关于Fourier分析的各种观点，发散地探讨分析学中一些更深入的话题. 因此最终选择(常系数)线性微分算子作为核心对象加以展开，期望编织出微分算子，奇异积分和Fourier变换之间美妙的联系. 思路偏向意识流，仅仅为了追求对Fourier变换更丰富的理解，无意对讲义提及的任何一个内容作正式研究. 听众/读者如欲更进一步，可以参考相关教材.

线性微分算子，Fourier乘子与奇异积分

上一章讲到线性偏微分算子，同时定理5.64指出了常系数PDE(可能的)可解性，所以这一章我们将目光集中在常系数情形下. (变系数微分算子就复杂多了；如欲继续深入，各位可以学习拟微分算子和Fourier积分算子的相关理论)

回顾常系数线性偏微分算子$P(D)$及其Fourier乘子$P(2\pi i\xi)$：

$$(P(D)f)^{\wedge}(\xi) = P(2\pi i\xi)\cdot\widehat{f}(\xi), f\in\mathcal{S}'$$

对于正算子$-\Delta: (-\Delta f)^{\wedge}(\xi) = (2\pi|\xi|)^2\cdot\widehat{f}(\xi)$，可以定义其平方根算子$(-\Delta)^{1/2}$:

$$((-\Delta)^{1/2}f)^{\wedge}(\xi) = 2\pi|\xi|\cdot\widehat{f}(\xi)$$

为了简化问题，今后设P齐次. 设$\deg P = m$，则(请计算验证)

$$P(D)f = (T\circ(-\Delta)^{m/2})f$$

其中算子T对应Fourier乘子

$$(Tf)^{\wedge}(\xi) = i^m\frac{P(\xi)}{|\xi|^m}\cdot\widehat{f}(\xi) \tag{1}$$

由齐次性，乘子是一个零次齐次函数. 所以关于常系数线性偏微分算子的研究归结于两个部分：零次Fourier乘子和算子$(-\Delta)^{1/2}$，本章也按此依次展开讨论.

对于乘子$i^m\frac{P(\xi)}{|\xi|^m}$，自然要问$T$对应了什么卷积算子. 将$P(\xi)$展开，乘子可以分解为以下部件

$$m(\xi) = i\frac{\xi_i}{|\xi|}$$

的多项式组合，所以来找$m(\xi)$的本体即可. 上一章求PDE基本解的方法自然派上用场.

命题6.1. 定义**Riesz变换**R_k：

$$R_kf(x) := c_n\cdot\text{p.v.}\frac{y_k}{|y|^{n+1}}*f(x)$$

则R_k满足

$$(R_kf)^{\wedge}(\xi) = -i\frac{\xi_k}{|\xi|}\widehat{f}(\xi)$$

注. 从乘子形式可以直接得到恒等算子I的分解：

$$I=-\sum_{k=1}^{n}R_k^2$$

且Plancherel定理可以被重写为R_j的等距同构性

$$\|f\|_2=\sum_j\|R_jf\|_2$$

证要.

我们将会看到，Riesz变换的形式并非偶然，而是源于零次乘子的本质结构. 我们建立下面重要的结构定理，即尺度不变型⇔零次Fourier乘子：

定理6.2.(零次乘子的结构定理) 设$m\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus 0)$是零次Fourier乘子，$T_m$是$\mathcal{S}$对应的变换. 则存在$a_m\in\mathbb{C}$，函数$\Omega_m\in C^\infty(\mathrm{S}^{n-1})$满足均值为0，$T_m$具有以下形式:

$$T_mf=a_mf+\mathrm{p.v.}\frac{\Omega_m(x')}{|x|^n}*f,\quad \forall f\in\mathcal{S}$$

其中$x'=x/|x|\in\mathrm{S}^{n-1}$.

零次齐次函数可以分解为常数项与零均值部分之和，所以定理6.2是下述定理的直接推论.

定理6.3. 设$m\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus 0)$是零次Fourier乘子. 设$m$在$\mathrm{S}^{n-1}$上的均值为0，则存在函数$\Omega_m\in C^\infty(\mathrm{S}^{n-1})$满足均值为0，$\widehat{m}$具有以下形式:

$$\widehat{m}=\mathrm{p.v.}\frac{\Omega_m(x')}{|x|^n}$$

证要. 在分布意义下$\widehat{m}$存在，且为$-n$次分布. 求导以零次化：

$$\xi_j^n\widehat{m}(\xi)=C_n(\frac{\partial^n m}{\partial x_j^n})\widehat{}(\xi)$$

研究齐次函数$\partial^n m/\partial x_j^n\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus 0)$，易知次数$=-n$，且$\mathrm{S}^{n-1}$上均值为0. 而作为分布其奇异性质集中于$x=0$上，所以考虑分离出正则部：主值积分p.v.$\partial^n m/\partial x_i^n$. 注意到两者之差是<u>点支分布</u>(请验证，留作练习！)，根据定理5.61，

$$\frac{\partial^n m}{\partial x_j^n}=\mathrm{p.v.}\frac{\partial^n m}{\partial x_j^n}+\sum_{|\alpha|\le N}c_\alpha D^\alpha\delta$$

于是作Fourier变换

$$\xi_j^n\widehat{m}(\xi)=C_n(\mathrm{p.v.}\frac{\partial^n m}{\partial x_j^n})\widehat{}(\xi)+\sum_{|\alpha|\le N}c_\alpha(2\pi i\xi)^\alpha$$

左式和右式第1项是零次分布，故多项式项必为常数c_0. 由于零次分布p.v.$\partial^n m/\partial x_j^n\in C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}),1\le j\le n$(请验证，留作练习！)，所以$\widehat{m}$是$\mathbb{R}\setminus\{0\}$上的$-n$次函数，并记$\widehat{m}\mid_{\mathrm{S}^{n-1}}=\Omega\in$

$C^\infty(\mathrm{S}^{n-1})$.
下面证明Ω均值为0. 我们构造试验函数$\phi \in \mathcal{S}$：

(1) ϕ径向，且$\phi(x) \geq 0$.
(2) $\mathrm{supp}(\phi) \subset 1 \leq |x| \leq 2$.
(3) $\phi(x) > 0, \forall x \in \mathrm{supp}(\phi)^\circ$.

则

$$
\begin{aligned}
\langle \widehat{m}, \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} \phi(x) \\
&= \int_1^2 \int_{\mathrm{S}^{n-1}} \frac{\Omega(u)}{r^n} \cdot r^{n-1} \, d\sigma(u) \, dr \\
&= \ln 2 \cdot \int_{\mathrm{S}^{n-1}} \Omega(u) \, d\sigma(u)
\end{aligned}
$$

另一方面，由$\phi, \widehat{\phi}$径向和m零次，

$$
\begin{aligned}
\langle \widehat{m}, \phi \rangle &= \left\langle m, \widehat{\phi} \right\rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{\phi}(r) r^{n-1} \, dr \cdot \int_{\mathrm{S}^{n-1}} m(u) \, d\sigma(u) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

最后证明在分布意义下$\widehat{m} = \mathrm{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n}$. 同样两者之差是单点支撑分布. 作缓增分布的Fourier反演有

$$
m - (\mathrm{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n})^{\frown} = C
$$

右式的多项式项是常数，因为m和$\mathrm{p.v.}\Omega(x')/|x|^n$均为零次. 又因为均值为0，$C = 0$. □

一般情况下$\Omega(x')/|x|^n \notin L^1(\mathbb{R}^n)$，正如之前关于卷积和Fourier变换的讨论所展示的，现在$T_m f$是否是常义函数存疑. 这代表了调和分析的一个核心话题：**奇异积分**. 显然为了让非可积的积分核有意义，我们需要更加精细的估计手段，即发轫于Calderón-Zygmund的实方法. 课程外感兴趣的朋友可以参考C-Z的两篇论文(*On the Existence of Certain Singular Integrals*，Acta Math. **88**(1952)，85-139；*On Singular Integrals*, Amer. J. Math. **78**(1956)，289-309)

奇核与Hilbert变换，C-Z算子，椭圆PDE

上一节讲到Riesz变换R_i，以及奇异积分

$$
Tf = \mathrm{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n} * f
$$

根据上一节的讨论不妨设Ω均值为0，显然这个积分不一定收敛. 一个简单的想法是，如果Ω满足某种对称性或许能保证收敛，就如主值积分一般. 所以先考虑Ω是S^{n-1}上的奇函数(奇核)，注意Riesz变换就属于这一类. 下面使用所谓的**rotaion method**转化为$n = 1$的

情形：设$f \in \mathcal{S}$，球面测度$\sigma(u)$

$$\begin{aligned}
Tf(x) =& \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\Omega(u)\int_{\epsilon}^{\infty} f(x-ru)\,\frac{dr}{r}\,d\sigma(u)\\
=& \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\Omega(u)\int_{-\infty}^{-\epsilon} f(x-ru)\,\frac{dr}{r}\,d\sigma(u)\\
=& \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\Omega(u)\int_{|r|>\epsilon} f(x-ru)\,\frac{dr}{r}\,d\sigma(u)
\end{aligned}$$

根据Ω均值为0，进一步分离

$$\begin{aligned}
Tf(x) =& \frac{1}{2}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\Omega(u)\int_{\epsilon<|r|<1}(f(x-ru)-f(x))\,\frac{dr}{r}\,d\sigma(u)\\
&+\frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\Omega(u)\int_{|r|>1} f(x-ru)\,\frac{dr}{r}\,d\sigma(u)
\end{aligned}$$

f的光滑性保证了第一项积分收敛，衰减性保证了第二项收敛，如果引入(定向)**Hilbert变换**：

$$H_u : H_u f(x) = \frac{1}{\pi}\text{p.v.}\int_{\mathbb{R}} f(x-tu)\,\frac{dt}{t}$$

或者等效地考虑

$$H : Hf = \frac{1}{\pi}\cdot \text{p.v.}\frac{1}{x} * f,\quad f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^1)$$

奇核的奇异积分就有形式

$$Tf(x) = \frac{\pi}{2}\int_{\mathrm{S}^{n-1}}\Omega(u)H_u f(x)\,d\sigma(u) \tag{*}$$

根据第三章练习2的Minkowski积分不等式，只要$\Omega \in L^1(\mathrm{S}^{n-1}$以及$H_u$是强$(p,p)$型算子，我们就能得到奇核积分的$L^p$有界性(留作练习！). 因此接下来的重点在于Hilbert变换的有界性，而这点并不简单，因为$\frac{1}{x}\notin L^1$，Hilbert变换继承了奇核的奇异性，我们需要更强大的分析工具. 尝试计算H对应的Fourier乘子(当然，是缓增分布意义下的)

练习1. Hilbert变换的乘子

$$m_H(\xi) = -i\cdot \mathrm{sgn}(\xi)$$

根据Parsevsal恒等式

$$\begin{aligned}
\|f\|_2 =& \left\|\widehat{f}\right\|_2\\
=& \left\|m_H\cdot\widehat{f}\right\|_2 = \|Hf\|_2
\end{aligned}$$

得到H是强$(2,2)$型. 但遗憾的是H不可能是强$1,1$型：

练习2. 设$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$，则$Hf\in L^1(\mathbb{R})$当且仅当$\int_{\mathbb{R}} f = 0$.

证要. 注意到

$$\begin{aligned}H_\epsilon f(x) =&\frac{1}{\pi}\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{f(y)}{x-y}\,dy\\ =&\frac{1}{\pi x}\cdot\int_{|x-y|>\epsilon}\frac{f(y)}{1-y/x}\,dy\\ =&\frac{1}{\pi x}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\int_{|x-y|>\epsilon}f(y)(\frac{y}{x})^n\,dy\\ =&\frac{A}{\pi x}+O(\frac{1}{x^2})\end{aligned}$$

其中$A=\int_{\mathbb{R}} f$. □.

那么如何研究弱$(1,1)$型呢？第4章为了研究H-L极大算子我们介绍了C-Z分解，那里已经看到它对函数奇异部分的控制相当有力. 这里进一步发掘其应用.

定理6.4. H是弱(1,1)型算子.

证明. 复函数分解为实部与虚部，而实函数分解为正部与负部. 所以不妨设$f\in L^1(\mathbb{R})$非负. 考虑高度$\lambda>0$的C-Z分解，这生成了一列不交的二进区间$\{I_j\}$，满足

(1) $f(x)\le\lambda,\quad$ a.e. $x\notin\Omega=\cup_j I_j$；

(2) $|\Omega|\le\|f\|_1/\lambda$；

(3) $\lambda<\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}f<2^n\lambda$.

借助C-Z分解f可分解为正则部g和奇异部b：

$$\begin{aligned}g(x) =&f(x),\quad x\notin\Omega\\ =&\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}f,\quad x\in I_j\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}b(x) =&\sum_j b_j(x)\\ b_j(x) =&(f(x)-\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j}f)\cdot\chi_{I_j}(x)\end{aligned}$$

据此得到以下性质：

(a) $0\le g(x)\le 2\lambda\quad a.e.$；

(b) $b_j(x)$均值为0，$\mathrm{supp}(b_j)\subset I_j$.

对于正则部，弱(1,1)型估计并不困难：

$$\begin{aligned}
a_{Hg}(\lambda) \leq & \frac{1}{\lambda^2}\|Hg\|_2^2 \\
= & \frac{1}{\lambda^2}\|g\|_2^2 \\
\leq & \frac{1}{\lambda^2}\int_{\mathbb{R}} 2\lambda \cdot g(x)\,dx \\
= & \frac{2}{\lambda}\|g\|_1
\end{aligned}$$

下面分析奇异部. 观察卷积内部的项$b_j(y)/(x-y)$，困难在于$x \in y + I_j$且$|y|$充分小的空间上(换言之，x充分靠近Ω). 但是C-Z分解的性质(2)，$|\Omega|$被弱(1,1)估计控制，那么取

$$\Omega^* = \bigcup_j 2I_j, \quad |\Omega^*| \leq 2|\Omega| \leq \frac{2}{\lambda}\|f\|_1$$

这样通过C-Z分解，靠近奇异性质的Ω^*得到控制:

$$\begin{aligned}
a_{Hb}(\lambda) \leq & \ |\Omega^*| + |\{x \in \mathbb{R} \setminus \Omega^* : |Hb(x)| > \lambda\}| \\
\leq & \ \frac{2}{\lambda}\|f\|_1 + \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb(x)|\,dx
\end{aligned}$$

而对可积性较好$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \Omega^*, y \in I_j$，记$I_j$的中心$c_j$，有$|x-y| \geq |x-c_j|/2$，我们得以直接估计：

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb_j(x)|\,dx \leq & \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} |Hb_j(x)|\,dx \\
= & \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{b_j(x-y)}{y}\,dy\right| dx \\
= & \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \left|\int_{\mathbb{R}} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\right| dx \\
= & \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \left|\int_{I_j} \frac{b_j(y)}{x-y}\,dy\right| dx
\end{aligned}$$

由性质(b)，作差

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb_j(x)|\,dx \leq & \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j}\int_{I_j} \left|b_j(y)\left(\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x-c_j}\right)\right| dy\,dx \\
\leq & \int_{I_j} |b_j(y)| \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \left|\frac{c_j - y}{(x-y)(x-c_j)}\right| dx\,dy \\
\leq & \int_{I_j} |b_j(y)| \int_{\mathbb{R}\setminus 2I_j} \frac{|I_j|}{|x-c_j|^2}\,dx\,dy \\
= & \int_{I_j} |b_j(y)| \int_{|r|>I_j} \frac{|I_j|}{r^2}\,dx\,dy \\
= & 2\|b_j\|_1
\end{aligned}$$

已知

$$|Hb(x)| \leq \sum_j |Hb_j(x)| \quad a.e.$$

因为对Hb_j的有限和显然成立，而$\sum b_j$和$\sum Hb_j$分别依L^2收敛于b和Hb，所以对无限和也成立(请验证之. 由于$\{b_j\}$支集两两不交，积分具有可加性). 继续应用可加性即有：

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb(x)| \, dx =& \sum_j \int_{\mathbb{R}\setminus\Omega^*} |Hb_j(x)| \, dx \\
\leq& 2\sum_j \|b_j\|_1 \\
\leq& 2\sum_j \int_{I_j} |f(x)| \, dx + (\frac{1}{|I_j|}\int_{I_j} |f|) \cdot |I_j| \\
=& 4\sum_j \|f\chi_{I_j}\|_1 = 4\|f\|_1
\end{aligned}$$

如此定理得证. □

这样通过实插值定理可知H是强(p,p)型，当$1 < p \leq 2$. 那么对于$p > 2$呢？第3章练习2提供了对偶延拓的方法(可以类比分布的对偶延拓，事实上在实分析课上我们将会知道Riesz表示定理：L^p与$L^{p'}$互为对偶空间，当然是在同构意义下)：

练习3. 对$f, g \in \mathcal{S}$，成立分部公式

$$\int_{\mathbb{R}} Hf \cdot g = -\int_{\mathbb{R}} f \cdot Hg$$

定理6.5. H是强(p,p)算子，$\forall 1 < p < \infty$.
证明. 只需考虑$p \in (2,\infty)$，则其Hölder共轭$p' \in (1,2)$. 根据稠密性，仅需设$f \in \mathcal{S}$，根据分部公式和第3章练习2的对偶公式，

$$\begin{aligned}
\|Hf\|_p =& \sup\{\left|\int_{\mathbb{R}} Hf \cdot g\right| : \|g\|_{p'} \leq 1\} \\
=& \sup\{\left|\int_{\mathbb{R}} f \cdot Hg\right| : \|g\|_{p'} \leq 1\} \\
\leq& \|f\|_p \cdot \sup\{\|Hg\|_{p'} : \|g\|_{p'} \leq 1\} \\
\leq& C_{p'} \|f\|_p
\end{aligned}$$

其中，第二个等号成立是因为虽然分部公式是在$g \in \mathcal{S}$而对偶公式要求遍历$g \in L^{p'}$，但$\mathcal{S}$在$L^{p'}$稠密，即可用Schwartz函数列g_k依$L^{p'}$逼近g，根据H的$L^{p'}$有界性可知Hg_k依$L^{p'}$逼近Hg，代入对偶公式即可(事实上我们只是重复了一遍稠密性技巧). 如此完成证明. □

推论6.6. Riesz变换R_i是强(p,p)型，$\forall 1 < p < \infty$.

练习4. 设$f = \chi_{[0,1]}$. 计算Hf说明H不可能是强$(1,1)$型和(∞,∞)型.

练习5. 这里对C-Z分解的技术进一步推广得到应用极广泛的一类"C-Z算子". 估计的基本

思路和Hilbert变换一脉相承：

(1)(C-Z) 设$K \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$是一个缓增分布，并满足

$$\left|\widehat{K}(\xi)\right| \le C \tag{a}$$

以及

$$\int_{|x|>2|y|} |K(x-y) - K(x)| \, dx \le C, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \tag{b}$$

条件(b)称为**Hörmander条件**. 证明卷积型算子

$$T : f \mapsto K * f, \quad \forall f \in \mathcal{S}'$$

是弱$(1,1)$型和强(p,p)型.
提示. 注意T的对偶算子对应了卷积核$K(-x)$.

(2) 证明以下**C-Z**条件成立则H条件成立：

$$|\nabla K(x)| \le \frac{C}{|x|^{n+1}}, \quad \forall x \ne 0 \tag{c}$$

提示. $|x| > 2|y| \Rightarrow |x-y| > |x|/2$.

下面关注$K(x) = \Omega(x')/|x|^n$的具体情形. 定义球面上的振幅

$$\omega_\infty(t) = \sup\{|\Omega(x_1') - \Omega(x_2')| : |x_1' - x_2'| \le t, \quad x_1', x_2' \in \mathrm{S}^{n-1}\}$$

(3) 证明如果Ω满足**Dini条件**

$$\int_0^1 \frac{\omega_\infty(t)}{t} \, dt < \infty \tag{d}$$

则核函数K满足条件(b).

(4) 设Ω球面上均值为0并满足条件(d)，则卷积型算子

$$Tf = \text{p.v.} \frac{\Omega(x')}{|x|^n} * f$$

是弱$(1,1)$型和强(p,p)型.
提示. 为证明强(p,p)型，注意条件(d)蕴含Ω有界，尝试原本用于奇核的rotaion method.

最后推广至K非卷积型. 设$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$对角线区域

$$\Delta := \{(x,x) : x \in \mathbb{R}^n\}$$

(5) 设T是强$(2,2)$型算子，且存在$\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta$上的函数$K(x,y)$，对$\forall f\in L^2_c(\mathbb{R}^n)$有

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\,dy,\quad \forall x\notin \operatorname{supp}(f) \tag{*}$$

并且K满足**Hörmander条件**

$$\begin{aligned}\int_{|x-y|>2|y-z|}|K(x,y)-K(x,z)|\;dx\le C\\ \int_{|x-y|>2|x-w|}|K(x,y)-K(w,y)|\;dy\le C\end{aligned}\tag{h}$$

证明T是弱$(1,1)$型和强(p,p)型.
提示. $(*)$仅在紧支撑条件下成立，但对于C-Z分解得到的函数b_j已足够；第一个估计证明T弱$(1,1)$，第二个估计用于T的对偶.

(6) 证明如果$K:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\setminus\Delta\to\mathbb{C}$满足**标准核**的条件：存在$\delta>0$，

$$|K(x,y)|\le\frac{C}{|x-y|^n}$$

$$\begin{aligned}|K(x,y)-K(x,z)|\le C\frac{|y-z|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}},\quad |x-y|>2\,|y-z|\\ |K(x,y)-K(w,y)|\le C\frac{|x-w|^\delta}{|x-y|^{n+\delta}},\quad |x-y|>2\,|x-w|\end{aligned}$$

则K满足条件(h). 定义$\mathbb{R}^n$上的(广义)**Calderon-Zygmund算子**T满足以下条件
(i) T是强$(2,2)$型.
(ii) 存在一个标准核K s.t. 对$\forall f\in L^2_c(\mathbb{R}^n)$有

$$Tf(x)=\int_{\mathbb{R}^n}K(x,y)f(y)\,dy,\quad \forall x\notin \operatorname{supp}(f)$$

回到微分算子理论. 根据第1节的(1)式，T是若干Riesz变换的复合与线性组合，所以T是强(p,p)型，$\forall 1<p<\infty$. 那么不禁设想，如果T存在逆算子T^{-1}，根据泛函分析中著名的逆映射定理

定理6.7.(Banach, 逆映射定理) 设Banach空间X,Y，有界线性映射$T:X\to Y$是一一对应，则逆映射$T^{-1}:Y\to X$有界.

(这里不可能介绍定理的证明了，不过定理实在太常用，没有泛函分析背景的朋友当作黑箱使用即可. 当然有基于奇异积分的证明，虽然铺垫同样繁冗以至无法在此处展示，但所需前置不超出当下，感兴趣的读者可以参考J. Duoandikoetxea的*Fourier Analysis*第4章第2-4节的内容，其中最后得到了结论

定理6.8. 设$q>1$，Ω是S^{n-1}的均值为0的函数，其奇部$\Omega_{odd}\in L^1(\mathrm{S}^{n-1})$，偶部$\Omega_{even}\in$

$L^q(\mathrm{S}^{n-1})$. 则奇异积分算子T

$$Tf = \text{p.v.}\frac{\Omega(x')}{|x|^n} * f$$

是强(p,p)型.)

那么T^{-1}也是强(p,p)型，常系数线性PDE

$$P(D)u = f, \quad f \in L^p, 1 < p < \infty$$

将变换为

$$(-\Delta)^{m/2}u = T^{-1}f$$

如此问题被大大简化：原本无穷无尽的$P(D)$可以归结为对$(-\Delta)^{m/2}u \in L^p$的研究. 不过能满足T可逆的$P(D)$需要条件. 为方便下面引入一些术语. 对于常系数线性偏微分算子

$$P(D) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \cdot D^\alpha$$

和它的**象征**

$$P(\xi) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \cdot \xi^\alpha$$

我们称$P(D)$是**椭圆**的，如果$P(\xi)$满足下界估计

$$P(\xi) \ge c\,|\xi|^m$$

例如Laplace算子Δ，Cauchy-Riemann算子$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$都是椭圆算子，而热方程，波方程就不是椭圆的.

现在把定理6.3中的算子T_m收集起来组成集合$\mathcal{A}$. 那么有以下代数刻画：

定理6.9. $\mathcal{A}$在配备常义下的加法和复合运算后构成一个交换代数. $T_m \in \mathcal{A}$可逆当且仅当$m\mid_{\mathrm{S}^{n-1}}$恒不为0.
证要. 注意$T_{m_1} \circ T_{m_2} = T_{m_1 m_2}$. T_m可逆当且仅当$T_{1/m} \in \mathcal{A}$，即零次乘子$\frac{1}{m}$满足$\frac{1}{m} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. □

对于<u>齐次</u>的$P(D)$，显然T_P可逆当且仅当P_D是椭圆算子(为什么呢？注意齐次多项式的零点集是一个锥面).

刻画完零次乘子部分，对$P(D)$的第二个部分$(-\Delta)^{m/2}$算子的研究其实本质在问：如何在L^p的语境下刻画光滑性. 我们留到后面叙述.

补充：Dirichlet核$\mathcal{D}_R$，Fourier级数的L^p收敛性

这一节是对Fourier级数收敛性的补充. 我们先建立从$\mathbb{T}$到$\mathbb{R}$的过渡.

定理6.10. 设$1 \le p < \infty$. 设卷积算子$\mathcal{K}_1*$是强(p,p)型，$\widehat{\mathcal{K}}$在$\mathbb{Z}$上每个点处连续. 令$L^p(\mathbb{T})$上

的乘子m:

$$m(k) = \widehat{\mathcal{K}}(k)$$

(即$K = K_m$是$\mathcal{K}$的周期化). 则K_m*是强(p,p)型，且$\|K*\| \leq \|\mathcal{K}*\|$.

证明. 证明实在太长，笔者直接摆烂. 请读者参考E. Stein和G. Weiss的*Introduction to Fourier Analysis in Euclidean Spaces*,p260-263的多元版本证明. □

练习6. 以下命题等价：

(1) $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$，依$L^p$范数$S_N f \to f,\ N \to \infty$.

(2) 存在常数C_p，

$$\|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad \forall N$$

提示. 三角多项式空间在L^p空间中稠密.

有了周期化的结果，关于Fourier级数的收敛性只需考虑$\mathcal{D}$上的Dirichlet核$\mathcal{D}_R$. 注意下面需要$p > 1$. 作Fourier变换

$$(S_R f)^\wedge(\xi) = \chi_{(-R,R)} \widehat{f}$$

联系Hilbert变换H的乘子

$$m_H(\xi) = -i \cdot \mathrm{sgn}(\xi)$$

那么可以通过频率的平移将H变换为S_R. 而我们知道频率的平移等价于物理空间的振动，所以考虑算子

$$M_R: \quad M_R f = e^{2\pi i R x} f(x)$$

则有(计算留作练习)

$$S_R = \frac{i}{2}(M_{-R} H M_R - M_R H M_{-R})$$

显然$M_{\pm R}$是L^p有界的. 由Hilbert变换的L^p理论我们得到

定理6.11. S_R是强(p,p)型，$\forall 1 < p < \infty$. 进而

$$\lim_{R \to \infty} \|S_R f - f\|_p = 0$$

进而得到了Fourier级数的L^p收敛性$(1 < p < \infty)$. 到现在为止想必足以认识到利用乘子(频率观点)是相当美妙的分析技术. 如欲在这方面深入，各位可以学习Littlewood-Paley理论的相关内容. 下面转进另一个话题.

Sobolev空间$W^{k,p}$，H^s与Fourier变换

这一节我们把目光转向算子$(-\Delta)^{m/2}$

$$((-\Delta)^{m/2} f)^\wedge(\xi) = 2\pi |\xi| \widehat{f}(\xi)$$

根据第2节的讨论，我们当然希望讨论一类分布u满足$(-\Delta)^{m/2}u \in L^p$. 换言之，用L^p范数刻画(弱)光滑性. 这个想法自然地导出重要的Sobolev空间.

定义6.12. 设$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, 1 \leq p \leq \infty$. **Sobolev空间**$W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$由以下函数$f$构成：

(1) $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$

(2) $\forall |\alpha| \leq k$，弱导数$D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

$W^{k,p}$配备范数

$$\|f\|_{k,p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_p$$

下面建立$W^{k,p}$的一些基本性质.

命题6.13. Sobolev空间构成降链：

$$W^{1,p} \supset W^{2,p} \supset ... \supset W^{k,p} \supset ...$$

命题6.14. $W^{k,p}$是Banach空间.

定理6.15. 设$1 \leq p < \infty$. 则$f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$当且仅当存在一列试验函数$\{f_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$满足以下条件：

(1) 依L^p范数$f_k \to f$；

(2) 对任意多重指标$|\alpha| \leq k$，依L^p范数$\{D^\alpha f_k\}$收敛.

注. 定理说明$W^{k,p}$是依前k阶导数的L^p范数对$\mathcal{D}$的<u>完备化</u>. 相应的可以建立<u>稠密性技巧</u>.

这一节我们先关注一个特殊情形$p = 2$：$H^k(\mathbb{R}^N) = W^{k,2}(\mathbb{R}^n)$. H^k在物理上很常见，因为平方可积条件往往用于限制能量有限. 同时L^2的Fourier分析相当强大：比如Plancherel定理这类物理空间与频率空间的对偶关系. 下面我们通过一组练习研究其推广——H^s空间，既是为下一节的一般情形作铺垫，也是对L^2的Fourier变换很好的回顾.

练习7. 设$s \in \mathbb{R}$. 定义L^2**-Sobolev空间**$H^s(\mathbb{R}^n)$：

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \ : \ (1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

并配备范数

$$\|f\|_{H^s} := \left\|(1 + |\xi|^2)^{s/2}\widehat{f}(\xi)\right\|_2$$

(1) 设k为非负整数. 证明$W^{k,2} \hookrightarrow H^k$，且两者的范数等价.

(2) 定义H^s上的内积：

$$\langle f, g\rangle_{H^s} := \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^s f(\xi) g(\bar{\xi})\, d\xi$$

证明H^s配备该内积是Hilbert空间.

(3) 给定任意$s\mathbb{R}$. 证明对任意m阶常系数线性微分算子$P(D)$，

$$P(D): H^s \to H^{s-m}$$

是连续映射. 特别地

$$(1+\Delta)^{m/2}: H^s \to H^{s-m}$$

是连续线性同构，其逆映射为$(1+\Delta)^{-m/2}$.

(4)(紧支分布的结构定理) 设紧支分布$c \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$的阶是$N$，则

$$c \in H^s, \quad \forall s < -N - \frac{n}{2}$$

注. 定理也定量地反映出分布的阶与分布的正则性的关系，我们之前已经阐述过.

(5)(Sobolev嵌入) 设$s > n/2$，证明嵌入映射

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C_0(\mathbb{R}^n)$$

良定义且连续，即存在常数C_s，

$$\|u\|_\infty \le C_s \|u\|_{H^s}, \quad \forall f \in H^s$$

提示. 根据L^1的Fourier变换，只需证明$\|\widehat{u}\|_1$被$\|u\|_{H^s}$控制.

(6) 给定$s \ge 0$. 设$g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. 证明映射

$$f \mapsto g \cdot f, \quad \forall f \in H^s(\mathbb{R}^n)$$

是H^s的连续线性算子.
提示. 用频率空间转述命题，并运用Schur test(第4章练习6).

(7) 设m阶变系数线性微分算子$P(D)$所有系数都是C^∞. 证明对$\forall s \in \mathbb{R}$

$$P(D): H^s \to H^{s-m}$$

是连续线性映射.

(8) 设$s > n/2$. 证明$H^s(\mathbb{R}^n)$是一个Banach代数，即乘积映射

$$u \mapsto u \cdot v, \quad u, v \in H^s$$

是连续线性算子

$$\|u \cdot v\|_{H^s} \leq C_s \|u\|_{H^s} \|v\|_{H_s}$$

提示. 利用卷积与乘积的对偶关系. 运用卷积$L^1 * L^2$的Young不等式作估计.

注. (6)(7)是一个更强命题的特例：

定理. 对$\forall s > 0$，$H^s \cap L^\infty$是一个Banach代数.

定理的证明依赖于Littlewood-Paley理论，感兴趣的朋友可以查阅参考文献. (7)已经体现了这类命题在变系数PDE的重要作用.

Riesz位势，Sobolev嵌入定理，椭圆正则性

这一节我们要研究一般的$W^{k,p}$空间. 我们将会看到奇异积分和(缓增分布的)Fourier变换在下面讨论中的核心地位.

我们还是先从算子$(-\Delta)^{m/2}$谈起，其对应的乘子是$(2\pi|\xi|)^m$, $\quad m \geq 1$. 承接上一节课关于椭圆PDE的讨论，欲解PDE$(-\Delta)^{m/2}u = f$，形式上我们自然地考虑逆算子$(-\Delta)^{-m/2}$：

$$((-\Delta)^{-m/2}f)\hat{}(\xi) := \frac{1}{(2\pi|\xi|)^m}\hat{f}(\xi)$$

(事实上这也是拟微分算子理论的起点blabla) 但目前我们并不知道这么操作是否有意义. 作出限制$0 < m < n$，那么$1/(2\pi|\xi|)^m \in S'$便可以计算Fourier变换.

练习8. 计算证明存在仅关于n, m的常数$\gamma_{n,m}$，在分布意义下

$$(\frac{\gamma_{n,m}}{|x|^{n-m}})\hat{}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-m}, \quad \forall 0 < m < n$$

注意m不必是整数，所以实际上我们构造了所谓的分数阶积分算子

$$I_\alpha : I_\alpha\varphi(x) = \gamma_{n,\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\varphi(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\,dy, \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

满足

$$(I_\alpha f)\hat{}(\xi) = \frac{1}{(2\pi|\xi|)^\alpha}\hat{f}(\xi)$$

其中正实数$\alpha \in (0, n)$(证明同样留作练习). I_α称作**Riesz位势**.
注. 借助Riesz位势以及奇异积分理论我们可以推广$W^{k,p}$为分数阶的Sobolev空间$W^{s,p}$. 这里不细说了.

可以看出我们已经在分布语境下求出$(-\Delta)^{m/2}u = f$的弱解. 当f是熟悉的函数(比如L^p, C^k等)时，我们当然还希望得到解更好的正则性，这就和Riesz位势更精细的性质密切联系. 根据$W^{k,p}$的定义，我们自然想研究I_α的L^p有界性. 借助scaling argument可知如果存在

常数C使$\|I_\alpha f\|_q \le C\|f\|_p$，$q$只能是$p$的Sobolev共轭：

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{\alpha}{n}$$

下面证明我们的猜测，如此$f\in L^p$时至少可以获得解的L^q正则性.

定理6.16.(Hardy-Littlewood-Sobolev) 设$0<\alpha<n$，$1\le p<\frac{n}{\alpha}$，令p的Sobolev共轭q，则I_α是强(p,q)型$(p>1)$和弱$(1,n/(n-1))$型.

证要. 我们提供两个证明，一个直接，朴素，体现了一般的估计思路；另一个借助H-L极大算子的结论. 但“分离-控制”的思想是不变的.

法一. 设$K(x)=1/|x|^{n-\alpha}$，以半径$A>0$分离奇异部分就有

$$K=K_1+K_\infty:=K\chi_{|x|\le A}+K\chi_{|x|>A}$$

其中显然$K_1\in L^1$；设p的Hölder共轭p'，则$K_\infty\in L^\infty\cap L^{p'}$：

$$p\le\frac{n}{\alpha}\Rightarrow p'(n-\alpha)>n$$

根据M实插值定理，只需证明弱(p,q)型估计$(1\le p<n/\alpha)$即可. 设$f\in L^p$，估计第一部分

$$\begin{aligned}a_{f*K_1}(\lambda)\le&\frac{\|f*K_1\|_p^p}{\lambda^p}\\ \le&\frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}\cdot\|K_1\|_1^p\\ =&\frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}\cdot(\int_{|x|\le A}\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\,dx)^p\\ =&C_1\frac{A^{\alpha p}}{\lambda^p}\cdot\|f\|_p^p\end{aligned}$$

对于第二部分，注意

$$\begin{aligned}\|f*K_\infty\|_\infty\le&\|K_\infty\|_{p'}\|f\|_p\\ =&(\int_{|x|>A}\frac{1}{|x|^{p'(n-\alpha)}})^{1/p'}\cdot\|f\|_p\\ \le&C_2A^{-n/q}\cdot\|f\|_p\end{aligned}$$

若取A满足

$$C_2\|f\|_p\cdot A^{-\frac{n}{q}}=\lambda$$

则$a_{f*K_\infty}(\lambda)=0$. 代入第一部分即有

$$\begin{aligned}a_{f*K}(2\lambda)\le&C\frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}\cdot(\frac{\lambda}{\|f\|_p})^{-\frac{q}{n}\cdot\alpha p}\\ =&C_{p,\alpha}(\frac{\|f\|_p}{\lambda})^q\end{aligned}$$

于是H-L-S估计成立. □

法二. 我们建立以下估计

$$|I_\alpha f(x)| \leq C_a \|f\|_p^{ap/n} \cdot Mf(x)^{1-ap/n}$$

然后由第4章关于M是弱$(1,1)$与强(p,p)型$(1<p\leq\infty)$的结论即可证明定理. 为证明该估计，采用法一的记号A, K_1, K_∞. 对于$f*K_1$，根据定理4.15有

$$\begin{aligned}|f*K_1(x)| \leq& \|K_1\| \cdot Mf\\ \leq& C_1A^\alpha \cdot Mf\end{aligned}$$

对于$f*K_\infty$，由Hölder不等式有

$$\begin{aligned}|f*K_\infty| \leq& \|K_\infty\|_{p'} \|f\|_p\\ =& C_2A^{-n/q} \cdot \|f\|_p\end{aligned}$$

依旧是scaling argument：取

$$A = (\|f\|_p \cdot Mf)^{-p/n}$$

则两个估计都成为$\|f\|_p^{ap/n} \cdot Mf(x)^{1-ap/n}$形式. □

回到Sobolev空间上. 设$f\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$，稠密性技巧(定理6.?)说明只需考察$f\in\mathcal{D}$. 一个合理的猜测是通过导数的$L^p$估计($f$的广义正则性)可以得到$f$的可积性，最简单的例子就是$f'\in L^1(\mathbb{R})\to f\in L^\infty(\mathbb{R})$. 接着作以下观察，考虑导数算子：

$$(\frac{\partial}{\partial x_i}f)\widehat{\ } = -2\pi i x_i$$

再引入前面提到的Riesz变换R_i和Riesz位势I_α，f及其导数有了以下联系：

$$f = I_1 \circ (\sum_i R_i \circ \frac{\partial f}{\partial x_i}) \tag{1}$$

根据R_j强(p,p)性和I_1强(p,q)性$(1<p<n)$，$f\in L^q$，即$1<p<q$时$W^{1,p}$可连续嵌入L^q中，由第4章的插值估计

$$\|f\|_{p_t} \leq \|f\|_{p_0}^{1-t} \|f\|_{p_1}^t$$

结论可推广至$\forall r:\quad 1<p\leq r\leq q$. 通过归纳法(请验证)得到

定理6.17.(Sobolev嵌入定理 I) 设$k\in\mathbb{Z}_{\geq1}, 1<p<n/k$，记$p$的Sobolev共轭$q$，则嵌入映射

$$W^{k,p}\hookrightarrow L^r,\quad \forall p\leq r\leq q$$

连续(有界).

这初步显示了奇异积分的巨大潜力. 不过单纯依靠上述方法无法处理高p指标的情形. 受Riesz变

换启发，我们对(1)加以更直接的分析：考虑乘子

$$m_i(\xi) = -i\frac{\xi_i}{|\xi|^2}$$

与相应的卷积核T_i. 计算可得(这时乘子是否是分布存疑，这里只是形式上的运算)

$$T_i f = c_n \cdot \text{p.v.}\frac{x_i}{|x|^n} * f$$

这里发现卷积项局部可积，这说明我们正走在正确的方向：的确在讨论缓增分布. 那么类似(1)式，在分布意义下对$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$成立($f$的限制自然是必要的)

$$\begin{aligned} f(x) =& c_n \sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y) \cdot \frac{y_i}{|y|^n}\, dy \\ =& \sum_i T_i(\frac{\partial f}{\partial x_i}) \end{aligned} \tag{2}$$

这里T_i和(2)式是通过Fourier变换“猜”出的，但直接用数分知识在常义函数的语境下证明也不难，留作练习. 也可以参考T. Tao的*An Epsilon of Room* Ⅰ*:Real Analysis*, p246-247的证明.

由(2)式直接得到

$$|f(x)| \leq c_n \sum_i \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x-y)\right| \cdot \frac{1}{|y|^{n-1}}$$

再次通过Riesz位势I_1得到

$$\|f\|_q \leq C \sum_i \left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_p$$

由稠密性技巧我们重新得到Sobolev嵌入定理Ⅰ.

下面考虑$k=1$，而$p \geq n$的情形. 这时Riesz位势刻画已经无能为力，但另一个强有力的卷积型估计：Young不等式

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_{p_1} \|g\|_{p_2}, \quad \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \tag{3}$$

证明是直接运用R复插值定理于两个熟知的估计(看作卷积算子$f * \cdot$)：

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &\leq \|f\|_p \|g\|_1 \\ \|f * g\|_\infty &\leq \|f\|_p \|g\|_{p'} \end{aligned}$$

应用于T_i：对$\forall s < n/(n-1)$

$$\begin{aligned} \|T_i f\|_r \leq& c_n \|f\|_p \cdot (\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{(n-1)s}} \cdot \chi_{\text{supp}(f)}\, dx)^{1/s} \\ \leq& C_{n,s,\text{supp}(f)} \|f\|_p \end{aligned}$$

其中$\chi_{\text{supp}(f)}$是f紧支集的光滑截断，反常积分项才因此收敛，所以之前的稠密性技巧在这

里失效了(常数系数与支集有关). 不过限制在局部上(以及归纳法)，我们依然能获得相当好的结果：

定理6.18.(Sobolev嵌入定理 II) 设$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, p = n/k$，则对任意紧集$K \subset \mathbb{R}^n$，

$$f\,|_K \in L^r(\mathbb{R}^n), \quad \forall 1 \leq r < \infty$$

特别地，嵌入

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n), \quad \forall p \leq r < \infty$$

连续(有界).(连续性证明留作练习)

最有趣的应该是$k = 1, p > n$的情形. 依然考虑$f \in \mathcal{D}$. 此时$p' < n/(n-1)$. 故

$$\begin{aligned}\|T_i f\|_\infty \leq & c_n \|f\|_p \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{(n-1)p'}} \cdot \chi_{\mathrm{supp}(f)}\, dx\right)^{1/p'} \\ \leq & C_{n,\mathrm{supp}(f)} \|f\|_p\end{aligned}$$

我们直接得到了上界估计. 那么如果在紧集K上按$W^{1,p}$范数$f_i \to f, \quad \{f_i\} \subset \mathcal{D}(K)$，那么收敛便是一致收敛，我们得到常义的正则性! 连续性是局部性质，因此

定理6.19.(Sobolev嵌入定理III) 设$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, p > n/k$，则(至多在零测集上修正后)

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^0(\mathbb{R}^n)$$

连续.(连续性证明留作练习)

注. 当然此时Sobolev嵌入定理 II 的结论依然成立，留作练习.

推论6.20. 设$k > m + n/p, \quad m \in \mathbb{N}$，则

$$W^{k,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^m(\mathbb{R}^n)$$

定理/练习9.(Hölder-Sobolev嵌入) 设$k = 1, p > n$，令$\alpha \in (0,1)$满足

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\alpha}{n}$$

则嵌入

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$$

连续(有界).

证要. 固定$x_0 \in \mathbb{R}^n$，在嵌入定理的证明中取$K_R = \{y : |y| < R\}, \quad R > 0$，在$K_R$上给出

$$\sup_{|y|<R} \frac{|f(x+y) - f(x)|}{|y|^\alpha}$$

关于R一致有界. □

现在只留下$p=1<n/k$这个端点情形，显然上面的方法也无能为力. 我们另辟蹊径，引入一个优美的不等式.

引理6.21. 设$f\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$，则

$$\|f\|_q\le(\prod_i\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right\|_1)^{1/n},\quad \frac{1}{q}=1-\frac{1}{n}$$

证要. 对n用归纳法. $n=1$情形是显然的：$\|f\|_\infty\le\|f'\|_1$；
现在假设不等式对$n-1$成立，考虑n. 设$x=(x',x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad x'\in\mathbb{R}^{n-1},x_n\in\mathbb{R}$. 令

$$A_j(x_n)=\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x',x_n)\right|dx',\quad j=1,...,n-1$$

和

$$A_n(x')=\int_{\mathbb{R}^1}\left|\frac{\partial f}{\partial x_n}(x',x_n)\right|dx_n$$

设指标q,q'分别对应$n,n-1$，即

$$q=\frac{n}{n-1},\quad q'=\frac{n-1}{n-2}$$

那么根据归纳假设，

$$(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|f(x',x_n)|^{q'}\,dx')^{1/q'}\le(\prod_{j=1}^{n-1}A_j(x_n))^{1/(n-1)}$$

而根据1维情形又有$|f|\le A_n(x')$，所以

$$|f|^q\le(A_n(x'))^{1/(n-1)}\cdot|f|$$

因此由Hölder不等式

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|f(x',x_n)|^q\,dx'\le&\int_{\mathbb{R}^{n-1}}(A_n(x'))^{1/(n-1)}\cdot|f|\,dx'\\ \le&(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}A_n(x')\,dx')^{1/(n-1)}\cdot(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}|f(x',x_n)|^{q'}\,dx')^{1/q'}\\ \le&(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}A_n(x')\,dx')^{1/(n-1)}\cdot(\prod_{j=1}^{n-1}A_j(x_n))^{1/(n-1)}\\ =&\left\|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right\|_1^{1/(n-1)}\cdot(\prod_{j=1}^{n-1}A_j(x_n))^{1/(n-1)}\end{aligned}$$

不等式两端再对x_n积分并再用(广义)Hölder不等式

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^1}(\prod_{j=1}^{n-1} A_j(x_n))^{1/(n-1)}\, dx_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^1}\prod_{j=1}^{n-1} A_j(x_n)^{1/(n-1)}\, dx_n \\
&\le \prod_{j=1}^{n-1}(\int_{\mathbb{R}^1} A_j(x_n)\, dx_n)^{1/(n-1)} \\
&= \prod_{j=1}^{n-1}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_1^{1/(n-1)}
\end{aligned}
$$

整理即得到所证不等式. □

注. 这类估计称为Loomis-Whitney不等式，它们都源于下面的不等式(证明与上文类似，留作练习)：

定理.(Loomis-Whitney) 设$n \ge 1, 1 \le p \le \infty$，$f_1, ..., f_n \in L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. 设$\mathbb{R}^n$上的函数

$$F(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

则

$$\|F\|_{L^{p/(n-1)}(\mathbb{R}^n)} \le \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}$$

引理6.21即为L-W不等式的推论，因为

$$|f(x_1, ..., x_n)| \le \int_{\mathbb{R}} |\partial_i(x_1, .., x_{i-1}, t, x_{i+1}, ..., x_n)|\, dt$$

令右式为引理中的f_i. 此外L-W型估计在组合，几何等方面应用甚广(比如令$f = \chi_\Omega$)，f_i即为区域Ω各方向的投影面积，这就是等周不等式的一个版本).

定理6.22.(Sobolev嵌入定理 I ') 嵌入

$$W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n), \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{n}$$

连续(有界).

证要. 对引理6.21的估计再用几何-算术均值不等式. □

注. 由此可以得到等周不等式的一个版本：

$$|\Omega| \le C_n\, |\partial\Omega|^{n/(n-1)}$$

留作练习(提示：将χ_Ω磨光). 事实上等周不等式与Sobolev嵌入定理 I '等价！(都有以弱制强的味道...)

至此我们完成了Sobolev嵌入定理的证明. 定理完整叙述如下：

定理6.23.(Sobolev嵌入定理) 设$k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$，$1 \leq p < \infty$，$p$的Sobolev共轭$q$.
(1) 设$p < n/k$，则$W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$连续嵌入$L^r(\mathbb{R}^n)$, $\quad \forall p \leq r \leq q$.
(2) 设$p = n/k$，则$W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$连续嵌入$L^r(\mathbb{R}^n)$, $\quad \forall p \leq r < \infty$.
(3) 设$p > n/k$，则$W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$连续嵌入$C^0(\mathbb{R}^n)$.

注. 嵌入定理有一条不依赖于Fourier分析(即仅在物理空间上做分析)的证明路线(来自Gagliardo-Nirenberg)，可以参考L. Evans的*Partial Differential Equations*或H. Brezis的*Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*的相关章节. 当然这蕴含着频率空间与物理空间一些更加微妙的关系，这里按下不表.

Sobolev空间的理论十分丰富，在PDE等分析学科更是处于基础地位，然而容量所限，只取一瓢饮：用$W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$刻画椭圆正则性.

定理6.24. 设$1 < p < \infty$，$f \in L^p$, m次齐次椭圆算子$P(D)$. 如果$P(D)f \in W^{k,p}(\mathbb{R}^n)$，则$f \in W^{k+m,p}$.
注. 这里还是要强调以下椭圆正则性的含义：$P(D)f \in L^p$只保证了f的某些m阶导数存在，但椭圆正则性使我们直接获得所有m阶导数(正则性比f完全高出m阶). 同时预设$f \in L^p$也是有物理考虑(比如$f \in L^2$代表能量有限).
证要. 设$\deg(P) = m$，我们依然用Fourier乘子和奇异积分的眼光研究导数：对$\forall \alpha, |\alpha| = m$，导数

$$D^\alpha f = R_\alpha \circ T^{-1}(P(D)f)$$

其中R_α是Riesz变换按指标α复合：

$$R_\alpha = R_{\alpha_m} \circ ... \circ R_{\alpha_2} \circ R_{\alpha_1}$$

算子T的乘子如同前文

$$m_T(\xi) = \frac{P(\xi)}{|\xi|^m}$$

根据前面对椭圆算子的讨论，T^{-1}存在且强(p,p)型. 综上我们得到**先验估计**(此时仅需$f \in \mathcal{S}'$)

$$\|D^\alpha f\|_p \leq C_p \|P(D)f\|_p$$

为得到f的各阶导数$D^\beta f \in L^p, \forall |\beta| \leq m$，我们需要一个**插值估计**

定理6.25. 设$1 < p < \infty$, m次齐次椭圆算子$P(D)$. 对$\forall f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$有插值估计

$$\left\|D^\beta f\right\|_p \leq C_p(\|f\|_p + \|P(D)f\|_p), \quad \forall |\beta| \leq m$$

证明设计为一组练习留给各位，也可以参考Adams的*Sobolev Spaces*,p135-139.

所以$f \in W^{m,p}$. 如果$P(D)f \in W^{k,p}$，将上述论证中f换作f的前k阶导数即可，如此便得到椭圆正则性. □

推论6.26. 如果$P(D)f \in C^\infty$，则$f \in C^\infty$.

证要. 这是Sobolev嵌入定理的直接应用. □

注. 根据Sobolev嵌入定理III，即便$P(D)f$正则性不好，如果m充分大，依然能获得解f先验的连续/光滑性.

尾声

最后一章至此，我们应微分算子之约重游了一回Fourier变换中的分析，但还是力有不逮只好割爱，比如调和函数与Hardy空间，Littlewood-Paley分解刻画几类函数空间(L^p，Sobolev空间，etc.)，波动/色散方程与振荡积分(Fourier积分算子)，拟微分算子与变系数PDE等等. Fourier分析的大千世界远不限于这个小小讨论班，每处景致笔者皆心驰神往. 然而人间没有不散的筵席，分析学的诗情还在更辽阔的天地，我们就此打住，把想象和未来交给各位自己.

夜霜月，于2023年1月10日

A 概率论报告 ——中心极限定理

报告人：cyc

A.1 写在前面

古典概率论里面有两个非常重要的极限定理：一个是大数定律，陈述了概率的客观存在性；另一个是中心极限定理，陈述的是正态分布的广泛适用性. 这两个定理对于概率统计乃至一些其他学科都有非常重大的意义，一般在初等概率论里面就会出现，但是证明它们却是要依赖很多高等工具的，其中最重要的就是Fourier变换工具的引进.

依赖于之前讨论班建立的各种收敛性定理，我们实际上已经可以尝试证明这两个命题，但正如武大某本概统辅导书上所说："要理解这些定理的细节与疑问，甚至要花费比考研全部时间还要多的精力. "所以我们肯定无法在一次讨论班上讲完证明的全部细节(更主要的是笔者只学了很少一部分的内容，而且这个问题目前还没完全解决，虽然已经不是热门方向).

为了保持这个专题的独立性，对于一些需要用到的Fourier分析的内容我会作为引理给出，而对于概率论的基础内容，考虑到有些同学可能还没学过，所以也会在文章最前面给出，在有了高中概率论基础并阅读完这部分前置知识之后，应该就可以跟得上了.

为了方便起见，我们将中心极限定理简记为CLT，由于这个定理有很多个版本，所以我们会在CLT后面加上一定的后缀来表示不同陈述下的命题.

A.2 预备知识——概率论基础概念

定义 A.1 (样本空间Ω). *试验的所有可能结果构成的集合.*

定义 A.2 (随机变量X). *定义在样本空间上的**实值函数**. 若值域是可数集，则称为离散型随机变量；若值域为$\mathbb{R}$，则称为连续型随机变量.*

定义 A.3 ((累积)分布函数$F(x)$). *$F(x) := P\{X \le x\}, x \in [-\infty, +\infty]$，每种分布对应唯一的分布函数.*

定理 A.1. *(1)分布函数总是从0单调递增到1;*

(2)离散型分布的分布函数是分段常值函数;

(3)连续型分布的分布函数是绝对连续函数，即存在可积函数$f(x)$，使

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \forall x \in \widetilde{\mathbb{R}}$$

(4)奇异型分布的分布函数是连续函数但不是绝对连续函数(如Cantor函数);

(5)任何分布可分解为以上三种分布的加权平均.

注 1. *在实际应用中，奇异型分布是很少的，即使真的遇到，我们也选择会用另外两种去逼近它，所以后面我们的讨论只限于离散型与连续型. 我们可能不会同时给出离散型分布和连续型分布的平行命题，但读者可以试着自己平行推广.*

定义 A.4 (概率密度分布函数$f(x)$). 定义在$\mathbb{R}$上的非负函数. 离散型对应于高中学过分布列，连续型对应于上述定理中的$f(x)$，奇异型没有密度分布函数.

定理 A.2. *(1)连续型随机分布的密度函数不唯一，但几乎处处唯一；*

(2)连续型随机分布的密度函数是几乎处处有限的.

定义 A.5 (几种基本分布). *(1)伯努利分布：投硬币模型；*

(2)二项分布：投多次硬币看正面次数；

(3)泊松分布：百度一下吧(bushi)；

(4)正态分布：这里我们规定正态分布的专用符号. (1)是正态分布的密度函数,(2)是分布函数.

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1}$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \tag{2}$$

注 2. 多元(联合)分布我们只给出分布函数的定义：

$$P\{(X_1, X_2, \cdots, X_n) \in A\} = \int \cdots \int_A f(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n \tag{3}$$

根据测度论的知识可以证明分布函数与累积分布函数互相唯一决定，所以我们不对这两个概念加以区分. 下面给出多元正态分布的两个等价定义，等价性的证明留给读者.

定义 A.6 (多元正态分布). *(1)设$\mathbf{U} = (U_1, U_2, \cdots, U_n)$为随机向量，其中$U_1, U_2, \cdots, U_n$相互独立且同$N(0,1)$分布；设$\mu \in \mathbb{R}^p$,$A \in \mathbb{R}^{p\times n}$，则称$\mathbf{X} = A\mathbf{U} + \mu$的分布为**$p$维正态分布**，或称$\mathbf{X}$为**$p$维正态随机向量**，记为$X \backsim N(\mu, AA^T)$*

(2)若p维随机向量$\mathbf{X}$的特征函数为

$$\Phi_X(t) = \exp[it^T\mu - \frac{1}{2}t^T\Sigma t](\Sigma \geq 0),$$

则称$\mathbf{X}$ 服从p元正态分布，记为$X \backsim N_p(\mu, \Sigma)$.

定义 A.7 (随机变量的数学期望EX). 若以下积分绝对收敛，则随机变量X的期望由此定义：

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x) \tag{4}$$

期望具有线性和单调性等基本性质，我们不特别列出来，不过我们提一个测度论里面很有用的结论，当然你也可以把它当作一个定义.

定理 A.3. *随机变量X的函数$h(X)$的期望为：*

$$Eh(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF_h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)f(x)dx \tag{5}$$

*当h为多项式函数时，$Eh(X)$称为**矩**. 特别地，$\mu = EX$为**一阶原点矩**;$\sigma^2 = E(x-\mu)^2$为**二阶中心矩**.*

注 3. *数学期望是描述随机变量(向量)分布的最基本、最重要的数字特征，没有之一. 其他所有数字特征(如方差、协方差、特征函数也就是Fourier变换)，本质上都是某个函数的数学期望. 而数学期望相当于把一个积分表达式打包起来，往后我们用期望来代替这些表达式的书写，会使得表达更为简洁而且意义更加明了.*

定义 A.8 (随机向量的数学期望EX)**.** *要求以下积分都绝对收敛. 设随机向量$X = (X_1, \cdots, X_n)$的分布函数为$F(X_1, \cdots, X_n)$,则对任意可测函数$g(X_1, \cdots, X_n)$,定义:*

$$Eg(X_1, \cdots, X_n) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dF(x) \tag{6}$$

X的期望定义为$(EX_1, \cdots, EX_n)$.

定义 A.9 (矩母函数MGF)**.**

$$M_X(t) := E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}f(x)dx \tag{7}$$

注 4. *之所以叫矩母函数是因为把它泰勒展开之后就可以从各项系数得到各阶矩.*

定义 A.10 (特征函数$\widehat{f}(t)$)**.**

$$\widehat{f}(t) := E[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f(x)dx \tag{8}$$

注 5. *特征函数的引入，使得Fourier分析在概率论与统计学中都扮演着十分重要的作用，由于特征函数可以完全决定一个随机变量的分布，同时每个分布都具有特征函数，所以我们可以把对分布的研究转化为对其特征函数的研究. 类似的，如果是一个非负型随机变量(比如寿命)，我们自然也可以考虑引入拉普拉斯变换$E[e^{-tX}]$，同样可以达到这个目的.*

这里我们要区分一下分析里面特征函数的概念，我们在概率论里面把那个叫做示性函数. 示性函数在概率论里面也非常重要，一个随机变量本质上就是一个示性函数，我们把事件与集合等同起来，示性函数把一个集合映成一个数，本质上就是建立了事件与数字之间的桥梁，使得我们可以把随机世界完全用数学语言刻画. 不过值得注意的是，一个数字的信息量是有限的，而事件可以是很复杂的，所以为了更加完整地描述这个事件，我们随机变量这个概念就得适当推广，比如用一个函数来描述一个事件，这样我们研究的问题就从欧式空间拓展到了函数空间，所以在概率论后续学习当中，函数空间论也扮演着非常重要的作用. (例如我们看这样一个不太实际但可能比较恰当的例子，一个粒子从某一点出发在一个时间里面会有一个运动轨迹，而一个运动轨迹我们就可以用一个函数来表示，这样就把粒子按某个轨迹运动这个事件通过随机变量映成一个函数).

定理 A.4 (唯一性定理)**.** *特征函数和分布函数互相唯一确定.*

这是Fourier分析的结论，我们只需验证反演条件即可. 但是我们会给出一些直观解释以便没学过概率论的同学对数字特征加深理解.

定理 A.5 (随机变量的标准化)**.** *如果一个随机变量X具有有限的均值μ和方差σ^2,那么可以将它标准化为均值为0，方差为1的随机变量X':*

$$X' = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{9}$$

注 6. *不是所有随机变量都具有均值和方差(如柯西分布).*

定理 A.6 (独立随机变量和的分布)**.** 设X和Y是两个相互独立的随机变量，$f_X(x)$ 和$f_Y(y)$分别是它们的概率密度，则随机变量$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy:=f_x*f_Y \tag{10}$$

注 7. 从概率论的角度来定义卷积，可以使卷积的很多性质可以不用通过积分运算而直接得到. 另外，这个公式里面有个关于随机变量独立性的假设，这是古典概率论的十分重要的性质，后面我们关于极限定理的讨论也很大程度上依赖于独立性的假设，关于相依变量的研究是最近几十年才比较热门的方向. 基于随机向量的独立性，我们有下面这个非常重要的引理(具体证明可以看概率论联合分布与协方差的内容). 把这个结论给完我们就开始来陈述CLT了.

引理 A.7. 设X和Y是两个相互独立的随机变量,则$f(X)$和$g(Y)$也相互独立，且

$$E[f(X)g(Y)]=E[f(X)]E[g(Y)] \tag{11}$$

练习:
1.随机向量X服从n元正态分布，证明：$\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx=1$.
2.随机向量X服从n元正态分布，即$X\backsim N_n(\mu,\Sigma)$，
证明：X各分量相互独立的充要条件是Σ为对角阵.
(关于独立性的定义需要引入条件分布，前面没有列出，如果不知道概念，此题可以跳过)
3.设$X=(X_1,\cdots,X_n)'$是n维随机向量，
证明：X服从n元正态分布的充分必要条件是对任意的$a\in\mathbb{R}^n$，$a'X$服从一维正态分布.
4.(X,Y)服从二元正态分布，求使$X+Y$和$X-Y$相互独立的充要条件.
5.设$\{F_n(x)\}$为一列一维正态分布函数，且收敛于$F(x)$，证明：$F(x)$也是一维正态分布函数.
6.若$\varphi(t)$是特征函数，证明：$\mathrm{e}^{\varphi(x)-1}$也是特征函数，因而有$|\mathrm{e}^{\varphi(x)-1}|\le 1$.
7.证明离散型随机变量和连续型随机变量的和是连续型随机变量.
(8题开始是前面Fourier分析已经得到的结论，在这里作为练习给出)
8.求正态分布的特征函数. (多元的情形在前面的内容里)
9.L^1上的反演定理：若$f,\hat{f}\in L^1$证明：$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(t)e^{ixt}dm(t)a.e.$
10.施瓦茨空间上的反演定理：$\mathcal{F}:\mathcal{S}(\mathbb{R})\to\mathcal{F}(L^1)$是单射.

A.3 中心极限定理的陈述与证明思路

注 8. 我们不打算直接从充要条件入手，因为那样我们看不到这个问题的发展历程，也对这个定理没有一个直观把握，当然也因为充要条件在实际问题中是不易于验证的，所以我们常见到的是其他几个版本(比如充要条件中没有对同分布的要求，但实际问题中我们往往是重复多次做同一个试验，即iid). 我们也不打算从多维的情况入手，因为方法和一维的情况其实差不多，但是矩阵运算真的太烦了. 所以我们最主要证明一维分布的情形. 在正式开始之前，我们先来定义几个“全局变量”.

定义 A.11. 给定一个序列$\{X_1,\cdots,X_n,\cdots\}$,如果每个$X_k$是一个随机变量，我们把这个序列叫做**随机变量序列**；如果每个X_k是在一系列试验中第k次试验的试验结果，那么我们把这个序列叫做**事件序列**或者**样本序列**. (其实就是一个概率论叫法，一个统计学叫法，因为就算代表的是事件，他也应该服从某种分布，只是这种分布我们不一定知道而已).

再定义

$$S_N=\frac{X_1+\cdots+X_N}{N},$$

*CLT*就是研究什么条件下的$\{X_n\}$可以使$\{S_N\}$收敛到正态分布.

注 9. *(1)*我们必须要求这个随机变量序列是相互独立的*(*这是古典概率论里面最重要的假设，作为古典概率论里面的辉煌结果，这个假设是当然要有的*)*.

*(2)CLT*就是研究独立随机变量$\{X_n\}$在什么条件下可以使S_N收敛到正态分布. 要收敛到正态分布，首先均值和方差得存在，而均值的存在性就依赖于概率的客观存在性，也就是大数定律；但方差呢*(*你可以算一下，因为方差也是一种期望，所以同样可以用大数定律*)*，很遗憾我们必须首先解决这个问题. 以后如果没有特殊声明，我们总是假设随机变量序列的均值和方差存在.

*(3)*事实上我们可以对$\{S_N\}$做进一步推广：

$$S_N = \frac{g(X_1) + \cdots + g(X_N)}{N},$$

，不过实际上没啥区别*(why)*，所以我们研究原来那个就行.

*(4)*证明过程中可以思考一下可不可以把事件个数推广到任意个呢.

定理 A.8 (Kolmogorov强大数定律). $\{X_n\}$是独立随机变量序列，且$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} \leq \infty$,则

$$\lim_{n\to\infty}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - EX_i) = 0\} = 1$$

注 10. 注意这里我们给出了大数定律几乎最强的版本，但我们不打算在这里给出具体证明，而是承认这个结果以便把中心极限定理推广到更一般的情形，不过可以简单提一下证明思路. 大数定律的证明主要用到的是概率不等式，弱大数定律的证明用到的是切比雪夫不等式，而*Borel*强大数定律就要用到更一般的马尔科夫不等式，而*Kolmogorov*强大数定律则要用到切比雪夫不等式下面这个非常强的推广,分析强的同学*(*指名道姓*)*可以试着独立推导.

引理 A.9 (*Hājek − Rényi*). $\{C_n\}$是非增正数列，则$\forall m < n \in \mathbb{N} \wedge \varepsilon < 0$有

$$P\left\{\max_{m\leq j\leq n} C_j\left|\sum_{i=1}^{j}(X_i - EX_i)\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}(C_m^2\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2 + \sum_{j=m+1}^{n}C_j^2\sigma_j^2)$$

推论 A.10. *(1)*我们几乎可以认为$ES_N \to \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i$.
*(2)*若$\{X_n\} \backsim iid(\mu, \sigma^2)$,则几乎一定会有$ES_N \to \mu.DS_N \to 0$.
*(3)*在*(2)*的条件下，令$Z_N = \frac{S_N-\mu}{\sigma/\sqrt{N}}$,则$EZ_N \xrightarrow{a.s.} 0, DZ_N \xrightarrow{a.s.} 1$.

注 11. 现在问题就转化为寻找Z_N收敛到标准正态分布的概率了.

定理 A.11 ($CLT1$). 设$\{X_n\} \backsim iid(\mu, \sigma^2)$,若$\exists\delta > 0, \forall|t| < \delta, M_X(t) = \mathbb{E}[tX]$收敛，那么当$N \to \infty$,$Z_N$会收敛到标准正态分布.

定理 A.12 ($CLT2$). 设$\{X_n\} \backsim iid(\mu, \sigma^2)$的前三阶矩都是有限的，且概率密度函数衰减得足够快，那么当$N \to \infty$,Z_N会收敛到标准正态分布.

注 12. 这两个都是独立同分布的场合，可以看出，第二个条件是比第一个条件弱得多的，这正体现了*Fourier*分析的强大之处. 不过我们这里没有给出概率密度衰减得足够快的量化描述，一方面是为了保持定理的简洁性，另一方面在证明过程中我们就可以发现为什么需要这个条件的限制，从而建立起对这个定理强大的直觉，以便我们理解更一般的情形. 在给出充要条件之前，我们得先给出非独立同分布场合的标准化变量.

定义 A.12. 给定一个独立随机变量序列$\{X_1,\cdots,X_n,\cdots\}$,假设他们具有有限的均值$\{a_n\}$和方差$\{b_n^2\}$, 定义

$$B_n^2=\sum_{k=1}^{n}b_k^2,$$

和标准化和数

$$Z_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{X_n-a_n}{B_N}$$

定义 A.13 (林德贝格条件)**.**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{|x-a_k|>cB_n}(x-a_k)^2dF_k(x)=0 \tag{12}$$

若对任意$c>0$,都有式(12)满足，则称$\{X_n\}$满足林德贝格条件.

定义 A.14 (费勒条件)**.**

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k\le n}\frac{b_k}{B_n}=0 \tag{13}$$

若式(13)满足，则称$\{X_n\}$满足费勒条件.

引理 A.13. 费勒条件等价于下面两个式子:

$$\lim_{n\to\infty}B_n=\infty \tag{14}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{B_n}=0 \tag{15}$$

定理 A.14 (CLT)**.** 林德贝格条件是$\{Z_N\}$收敛于标准正态分布的充分条件，若$\{X_n\}$还满足费勒条件,则林德贝格条件也是必要条件.

注 13. *注意现在我们已经给出了CLT的充要条件，但显然这个条件不太容易验证，所以实际情况中我们用的往往是其他版本的CLT，而其他版本(包括$CLT1,CLT2$)的证明都可以通过验证林德贝格条件是否满足. 后面我们会给出其他版本的CLT作为练习大家自行验证. 而多元中心极限定理我们只给出独立同分布的版本，想了解更具体的可以去看数理统计的书. 下面我们陈述证明思路.*

[**问题分析**]前面需要用到大数定律的部分我们已经完成了. 大致上的证明思路就是证明Z_N的分布函数$F_{Z_N}(x)$收敛到$\Phi(x)$,对于离散型随机变量来讲就是证明密度函数$f_{Z_N}(X)$(逐点)收敛于$\varphi(x)$;对于连续型随机变量来讲就是证明密度函数$f_{Z_N}(X)$几乎处处收敛于$\varphi(x)$. 密度函数是比分布函数好处理的，所以我们一种思路是可以先考虑先对离散型、连续型的情况给出证明，然后奇异型的用连续型或者离散型的去逼近，而任意分布都可以分解成这三种分布的加权平均，所以我们就完成了定理的证明. 但是注意，我们其实几乎可以不用考虑奇异型分布的情况，一方面因为这种分布实在太少，我们几乎可以认为它不会在实际问题中存在；另一方面，我们已经用到了大数定律，所以我们最后能得到的结论也只是独立随机变量和的分布几乎一定会收敛到正态分布. 我们当然会给出一个统一的证明，但是实际应用的时候应该注意到这一点.

[**证明思路**]要证明一个分布收敛到另外一个分布，我们实际上就是要找到可以几乎完全刻画这个分布的数字特征，证明它收敛到正态分布的数字特征，然后由数字特征的收敛反过来导出原来分布的收敛. 数字特征可以由期望构造，而构造的出发点就是$\{Z_N\}$的形式，

Z_N本质上是一个随机变量和的分布，而和的分布对应于卷积运算，所以我们构造数字特征的时候必需处理掉卷积运算，这当然可以想到Fourier变换，不过从概率论的角度可以找到一个统一的出发点，实际上也可以通过卷积算子直接给出证明(见费勒《概率论及其应用》第二卷)，然后反推的时候就依赖于各种收敛定理了. 至此概率论的工作已经基本完成，后面的任务都是分析了，我们把证明的内容放在下一部分.

(这一部分的内容有一些不太恰当，但时间原因就不修改了)

A.4 关键性引理与证明步骤

CLT中的收敛指的是分布函数在下面这种意义下的收敛.

定义 A.15 (依分布收敛). *对于分布函数列$\{F_n(x)\}$，如果存在一个非降函数$F(x)$，使得$F_n(x)$在每个连续点都收敛于$F(x)$，则称$F_n(x)$弱收敛于$F(x)$.如果$F(x)$是一个正常概率分布，我们就称这是一个正常收敛.*

鉴于已经建立起来的Fourier工具，有一种情形的证明不需要引入新的工具，我们以它开始让大家熟悉这个定理.

定理 A.15 ($CLT2.1$). *设连续型随机变量序列$\{X_n\} \backsim iid(\mu, \sigma^2)$的前三阶矩都是有限的，且概率密度函数衰减得足够快，那么当$N \to \infty, Z_N$会收敛到标准正态分布.*

证明. 直接做Fourier变换，把无穷卷积化为无穷乘积，再分析无穷乘积的收敛性，然后验证反演定理条件. 此情形对于多元随机向量的证明是一模一样的. □

这个方法对于一般的分布就失效了，因为会导致不正常收敛，所以我们需要放弃使用密度函数，时间只够我们完成一元的情形，笔者目前的能力只能完成独立的情形. 我们知道特征函数和分布函数互相唯一确定，但是我们不知道的是分布函数的极限会不会还是分布函数，如果是那就好办了，我们仍能延续上面的证明过程，如果不是，那需要附加什么条件呢，下面我们先要来回答这个问题.

引理 A.16. *$F_n(x)$在一个稠密集每一点都收敛于$F(x)$，则$F_n(x)$在每个连续点都收敛于$F(x)$.*

定理 A.17 (Helly第一定理). *任一一致有界的非降函数列$\{F_n(x)\}$中存在一个弱收敛的子列.*

证明. 根据前一引理，找实数集的一个可数稠密子集，然后根据致密性定理选取子列，再抽取对角子列. □

下面这个定理不给出证明，后面我们有替代的版本，只是为了不影响主线给出.

定理 A.18. *(1)Helly定理中给出的子列是正常收敛的，当且仅当$\{F_n(x)\}$是随机有界的.*

(2)若$\{F_n(x)\}$的每个收敛子列都弱收敛于$F(x)$，则$\{F_n(x)\}$的弱收敛于$F(x)$

在进入正题之前，我们先来考虑一些直观(兴许如此)的例子，它告诉我们标准化的非退化分布的标准化随机变量和最后的增点总是稠密的. 引入这个例子是想说明：离散型和连续型卷积在直观上很不统一，所以我们需要从新的角度来理解这个问题.

引理 A.19. *如果a, b分别是分布函数F, G的增点，那么$a+b$是$F \star G$的增点. 如果a, b分别是分布函数F, G的原子(可以理解为破坏绝对连续性质的点)，那么$a+b$ 是$F \star G$的原子.反之，$F \star G$的所有增点都是这种形式的.*

定理 A.20 (随机变量和的稠密性). *设F是$\mathbb{R}$一个分布，Σ为$F^{\star}, F^{2\star}, \cdots$的所有增点的集合.*

(1)若F集中在非负半轴但不退化到原点，则当F不是算术分布时，Σ在无穷远处渐近稠密；当F为步长为λ的算术分布时，对充分大的n, Σ 包含所有的$\{n\lambda\}$.

(2)若F不集中在某一半轴，则当F不是算术分布时，Σ在整个实轴上稠密；当F为步长为λ的算术分布时，$\Sigma = \{0, \pm\lambda, \cdots\}$.

到这里可以尝试把之前的等分布理论从概率论的角度给出另一个证明了,思路和CLT差不多，构造一个适当的分布列证明它收敛到均匀分布就好. 支线任务做完了，下面回来做主线任务

定理 A.21 (连续性定理). *(1)若分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于某一分布函数$F(x)$，则相应的特征函数列$\{f_n(t)\}$内闭一致收敛于$f(t)$. (2)若特征函数列$\{f_n(t)\}$收敛于某个$f(t)$,且$f(t)$在原点连续，则相应的分布函数列$\{F_n(x)\}$弱收敛于分布函数$F(x)$，且$F(x)$的特征函数是$f(t)$.*

证明. 第一个留作练习，只证第二个. 由Helly定理选出一个弱收敛子列收敛到$F(x)$，然后适当调整使$F(x)$右连续，再利用特征函数在原点的连续性证明这是个正常收敛(分段估计)，再根据(1)知道$F(x)$的特征函数是$f(t)$. 再由特征函数和分布函数互相唯一确定可以证明$F_n \xrightarrow{W} F$. □

装备已经齐全了，没必要刷怪了，我们直接打今天的boss吧. 有了上述定理之后，和连续型的情形几乎一样了.

定理 A.22 (CLT). *林德贝格条件是$\{Z_N\}$收敛于标准正态分布的充分条件，若$\{X_n\}$还满足费勒条件,则林德贝格条件也是必要条件.*

详细证明可以参考《概率极限理论基础》第68到71页内容.

我们虽然已经把证明完成，但对于这个已经发展起来的成熟理论，这已经是其中独立分布的情形. 我们还没有完成多元情况的推广，没有完成对收敛速度做出估计，还没有向半群，向鞅上，还有向更一般的度量空间做出推广，测度论和泛函学了的同学可以看上面那本书.

A.5 补充习题

1.(方差不存在时)$\{X_n\}$独立同分布，若

$$F(-x) = 1 - F(x)(x \in \mathbb{R}), 2F(-x) = x^{-2}(x \geq 1)$$

证明：$\{\frac{S_n}{\sqrt{nlnn}}\}$收敛于标准正态分布.

(提示：验证林德贝格条件)

2.$\{X_n\}$相互独立，且存在常数列$\{K_n\}$，使

$$\max_{1 \leq j \leq n} |X_j| \leq K_n$$

和

$$\lim_{n \to \infty} \frac{K_n}{B_n} = 0$$

,则按CLT0中定义的标准化随机变量和Z_n收敛于标准正态分布.
3.(重对数律)设$\{X_n\}$相互独立，且均为标准化随机变量，则

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}|\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}|=1\Big)=1$$

A.6 附录

A.6.1 定理4.6的证明

直接通过定义可以验证：如果a,b分别是分布函数F,G的增点，那么$a+b$是$F\star G$的增点. 反之，$F\star G$的所有增点都是$a+b$这种形式的，所以Σ对加法封闭. 根据这个结论，若F是步长为λ的算术分布，那么$\Sigma\subset\{n\lambda,n\in\mathbb{Z}\}$,所以此时$\Sigma$不可能稠密. 先考虑(1)，由于$F$不退化到原点，故$\Sigma$包含无穷多个元素，任取$0<a<b\in\Sigma$,令$h=b-a$.先证明(1°)要使$\Sigma$稠密，只需要$h$可以任意小就行. 再证明(2°)如果$h$不可以任意小，那么$F$是算术分布，于是当$F$不是算术(格点)分布时，$\Sigma$在无穷远处渐近稠密. 记$I_n=(na,nb]$,

取$N\in\mathbb{N}$足够大，使$\forall n\geq N,|I_n|>a$,于是$(n+1)a\in I_n$.

$\Rightarrow\forall x>Na,\exists n\geq N,x\in I_n$.

另一方面，$na+kh=(n-k)a+kb\in\Sigma,\forall n\geq N,1\leq k\leq n$,

这些点将区间$I_n(n\geq N)$划分成了长度为h的子区间,x必然落在这些子区间里面.

$\Rightarrow\forall x>Na,\exists y\in\Sigma,|x-y|\leq\frac{h}{2}.(*)$.

1°.若$\forall\varepsilon>0,\exists a,b\in\Sigma,s.t.h<\varepsilon$,那么由$(*)$式知$\Sigma$在无穷远处渐近稠密.

2°若$\exists\varepsilon_0>0,\forall a,b\in\Sigma,h\geq\varepsilon_0$,那么可以取$a,b\in\Sigma$,使$h<2\varepsilon_0$，否则用$2\varepsilon_0$代替$\varepsilon_0$.于是由$(*)$式知

$I_n\subset\{na+kh|k\in\mathbb{N}\},\forall n\geq N$.

$\Rightarrow(N+1)a=Na+k_0h,\Rightarrow a=k_0h$于是在充分远处$\Sigma_{\geq Na}=\{nh|h\geq Nk_0\}$

这就证明了(1)的后半部分，另一方面，

$\Rightarrow\forall c{:}F,c\in\Sigma,\not\exists n,s.t.na+c>Na,\Rightarrow na+c=n'a+k'h,\Rightarrow h|c$,即$F$是算术分布，且步长$\lambda=h$.

综合前面的分析可以得到，如果F不是算术分布，那么Σ在无穷远处渐近稠密，这样就证明了(1)的前半部分.

3°若F不集中在一个半轴，那么$\exists-c\in\Sigma$.

于是当F不是算术分布时,$\forall x\in\mathbb{R},\exists n,s.t.nc+x>Na$,由$(*)$式和(1),

$\forall\varepsilon>0,\exists y\in\Sigma,|x-y+nc|<\varepsilon$,fi$y-nc\in\Sigma$,故$\Sigma$在整个实轴上稠密.

当F为算术分布时，由2°的论述知$\lambda|c$，因此$\{n\lambda,n\in\mathbb{Z}\}\subset\Sigma$,反包含关系开头已经证了，所以$\{n\lambda,n\in\mathbb{Z}\}=\Sigma$.

A.6.2 重对数律的一种证法

这个命题应该是指出了这是最佳估计，也就是要证明：

$$P\Big(\limsup_{n\to\infty}\Big|\frac{S_n}{\sqrt{2n\ln\ln n}}\Big|=1\Big)=1$$

令$A_n = \{S_n > c\sqrt{2n\ln\ln n}\}, c > 0$，那么根据$S_n$的对称性，要证的式子就等价于(2)式：

$$P\{A_n\ i.o.\} = \begin{cases} 0, c > 1 \\ 1, 0 < c < 1 \end{cases}$$

根据$Borel-Cantelli$引理，要证明(2)式的第一部分，只需要证明(3)式：

$$\sum P(A_n) < \infty, \forall c > 1$$

而对(2)的第二部分，要使用$Borel-Cantelli$引理，则需要保证事件序列的独立性. 注意到随机变量序列$\{S_{n_k} - S_{n_{k-1}}\}$是相互独立的，为此可以构造独立的事件序列$\{B_{n_k}\}$

$$B_{k,\delta} = \{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\delta)\sqrt{2m_k\ln\ln m_k}\}, m_k = n_k - n_{k-1}$$

只要证明$\forall 0 < c < 1$,都可以找到一个合适的子列$\{n_k\}$和$\delta > 0$,使得

$$P(A_{n_k}\ i.o.) \geq P(B_{k,\delta}\ i.o.)$$

再根据：

$$P(A_n\ i.o.) \geq P(A_{n_k}\ i.o.)$$

那么根据$Borel-Cantelli$引理，要证明(2)的后半部分，就只需要证明(6)式：

$$\sum P(B_{k,\delta}\ i.o.) = \infty, \forall 0 < \delta < 1$$

因此问题化归为对(3)(4)(6)的证明. 先分析(3)，对$P(A_n)$本身很难做比较好的估计，为了应用一系列的极大不等式，考虑先将其放大：

$$\begin{aligned} P(A_n\ i.o.) &= P\{S_n > c\sqrt{2n\ln\ln n}\ \ i.o.\} \\ &\leq P\{\max_{j\leq n_{k+1}} S_j > c\sqrt{2n_k\ln\ln n_k}\ \ i.o.\} \\ &\leq 2P\{S_{n_{k+1}} > c\sqrt{2n_k\ln\ln n_k} - \sqrt{n_{k+1}}\ \ i.o.\} \end{aligned}$$

这对任意的子序列$\{n_k\}$是成立的，最后一个不等式的估计用到了莱维极大不等式(7)和赫尔德不等式估计(8):

$$P\{\max_{k\leq n} S_k \geq a\} \leq 2P\{S_n > a - \mathbb{E}|S_n|\}, \forall a > 0$$

$$(\mathbb{E}|S_n|)^2 \leq \mathbb{E}S_n^2 = n$$

因此要证明(3),只需要找到一个子序列$\{n_k\}$，使得

$$\sum P\{S_{n_{k+1}} > c\sqrt{2n_k\ln\ln n_k} - \sqrt{n_{k+1}}\} < \infty$$

注意到只要$\frac{n_{k+1}}{n_k}$是有界的，那么$\forall c_1 \in (1, c)$，当k充分大的时候有：

$$P\{S_{n_{k+1}} > c\sqrt{2n_k\ln\ln n_k} - \sqrt{n_{k+1}}\} \leq P\{S_{n_{k+1}} > c_1\sqrt{2n_k\ln\ln n_k}\}$$

再选取$c_2 = \frac{1+c_1}{2}, n_k = [c_2^k](k \gg 1)$，就有

$$P\{S_{n_{k+1}} > c_1\sqrt{2n_k\ln\ln n_k}\} \leq P\{S_{n_{k+1}} > c_2\sqrt{2n_{k+1}\ln\ln n_{k+1}}\}$$

于是(3)最终转化为证明(9),

$$\sum P\{S_{n_k} > c_2\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}\} < \infty, n_k = [c_2^k]$$

根据独立同分布的中心极限定理和$Berry - Esseen$不等式的估计,，当$\{n_k\}$是指数正增长时，

$$\sum P\{S_{n_k} > c_2\sqrt{2n_k \ln\ln n_k}\} < \infty \Leftrightarrow \sum_k 1 - \Phi(\frac{c_2\sqrt{2\ln\ln n_k}}{\mathbb{E}(X_{n_k}^2 1_{|X_{n_k}|<\sqrt{n_k}})}) < \infty$$

根据课本第五章作业题的如下估计式：

$$\frac{x}{1+x^2}\mathrm{e}^{-x^2/2} \le \int_x^\infty \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t \le \frac{1}{x}\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

所以当$k \to \infty$时，

$$1 - \Phi(\frac{c_2\sqrt{2\ln\ln n_k}}{\mathbb{E}(X_{n_k}^2 1_{|X_{n_k}|<\sqrt{n_k}})}) \backsim \frac{\mathbb{E}(X_{n_k}^2 1_{|X_{n_k}|<\sqrt{n_k}})}{2c_2\sqrt{\pi\ln\ln n_k}}(\ln n_k)^{-c_2^2} \backsim O(\frac{1}{k^{-c_2^2}})$$

因此根据(10)和(11)，(9)式成立. 下面证明命题的第二部分，即(4)和(6). 先对(6)做估计，

$$P\{S_{n_k} - S_{n_{k-1}} > (1-\delta)\sqrt{2m_k \ln\ln m_k}\} = P\{S_{m_{k-1}} > (1-\delta)\sqrt{2m_k \ln\ln m_k}\}$$

为了应用(10)，只需要在选取选取$\{n_k\}$时使$\{m_k\}$呈指数正增长. 然后在k充分大时又有

$$\mathbb{E}(X_{n_k}^2 1_{|X_{n_k}|<\sqrt{n_k}}) > 1/2$$

因此根据(11)式就得到(6)式成立. 要使$\{m_k\}$呈指数正增长，只需要$\{n_k\}$呈指数正增长，设$n_k = [a^k], a > 1$对选定的$0 < c < 1$，要使(4)式成立，只需要在k充分大时有

$$c\sqrt{n_k \ln\ln n_k} < (1-\delta)\sqrt{m_k \ln\ln m_k}$$

只需要

$$(\frac{c}{1-\delta})^2 < 1 - \frac{1}{a}$$

取$\delta = \frac{1-c}{2}, a = [\frac{4}{(c+1)^2 - 4c^2}] + 1$即可，于是就证明了最终命题.

A.6.3 一些理解与注释

中心极限定理的条件千奇百怪，但总的来说只有两个目的：一是保证特征函数的收敛性，二是保证各加项均匀地小，也就是每个变量在总的分布中不起太大的作用(或者说个体特征在群体中无法体现). 前者依靠对各阶矩的收敛性做出限制，后者则由林德贝格给出了量化描述. 在独立同分布的场合，由于每个变量起的作用是一样的，所以后者是自动满足的，因此只需要对各阶矩进行限制. 对于独立不同分布的场合，额外的条件都是为了后面的条件得到满足. 在证明的过程中，各加项均匀地小实际上使得高频的部分可以被控制住.

林德贝格条件告诉我们，满足方差存在以及各加项均匀地小的独立随机变量叠加起来会满足正态分布. 但是各加项均匀地小其实只是一个充分条件，而非必要条件，因为即使有一个随机变量个体在群体中起了支配作用，只要这个随机变量它是正态变量，那依然有机会使得总体分布表现为正态分布. 比如$X_n \backsim N(0, 2^n)$，显然不满足各加项均匀地小，但是叠加在一起还是正态分布. 因此要避免这种情况发生，就要对随机变量附加费勒条件，这样

林德贝格条件就也是必要条件了. 林德贝格条件虽然给出了各加项均匀地小的量化描述，但在实际问题中这是不易于验证的，不过由于它是充要条件，所以对于其他条件的中心极限定理，我们就不需要重复证明，只需要验证林德贝格条件是否满足就行. 基于此可以得到一些在实际应用中更易于检验的充分条件.

通过计算推导和逻辑论证，我们确实证明了独立分布和最终会收敛到正态分布，但是有没有可能省去那些繁杂的步骤给出一个直观解释呢？直观地想，变量的增加是会导致不确定性的增加的，而在信息论中一个定理："在方差固定的情况下，正态分布的熵是最大的."所以当我们把变量个数不断增加，系统将逐渐趋于最"混乱"的正态分布. 这给我们提供了收敛到正态分布的一个直观解释. 另一方面，可以证明：$f(t)=\exp(-|t|^{\alpha})$当$0<\alpha\leq 2$时为特征函数，而当$\alpha>2$时不是特征函数. 故正态分布的特征函数也是某种意义上的临界值.